

Modelo de maximização de lucros em campanhas de divulgação para supermercados

Rodrigo Aparecido Flausing Peron (UEM)
rfperon@gmail.com

Ana Carolina Neves Carnelossi (UEM)
anacarolinacarnelossi@hotmail.com

Giovane Calegari (UEM)
giovanecalegari1@gmail.com

Rafael Henrique Palma Lima (UTFPR)
rafaelhlima@utfpr.edu.br

Gislaine Camila Lapasini Leal (UEM)
gclleal@uem.br

Objetivo: desenvolver um modelo matemático para a programação de anúncios de produtos em múltiplas mídias utilizando Programação Linear Inteira, a fim de maximizar o lucro da loja ao longo de determinado horizonte de planejamento.

Método: pesquisa quantitativa, empírica-axiomática normativa, realizada por meio do procedimento de modelagem na forma de programação linear relativo a um problema determinístico de otimização de lucro.

Originalidade/Relevância: ausência de aplicações da Pesquisa Operacional aplicada ao Marketing, no âmbito do processo de advertising e às suas etapas de seleção e planejamento/programação de mídia, que considerem de modo concomitante à seleção da mídia, os produtos a nela serem anunciados.

Resultados: modelo matemático desenvolvido para a programação ótima de anúncios de produtos em múltiplas mídias, acompanhado de diretrizes para sua aplicação por parte das empresas.

Contribuições teóricas/metodológicas: avanço dos estudos científicos da Pesquisa Operacional aplicada ao Marketing, no âmbito do processo de advertising e às suas etapas de seleção e planejamento/programação de mídia.

Contribuições sociais / para a gestão: aporte de um modelo matemático que pode ser utilizado pelas organizações para subsidiar suas decisões no que diz respeito à programação de anúncios de seus produtos nas múltiplas mídias disponíveis, de forma racional e otimizada no que tange ao lucro decorrente das mesmas em determinado horizonte de planejamento.

Palavras-chave: Marketing, Anúncio, Mídia, Pesquisa Operacional, Varejo, Supermercado.



1. Introdução

No contexto do varejo brasileiro, uma das práticas de publicidade comumente adotadas para elevar o volume de vendas é a realização de promoções de produtos ao consumidor, de modo a diferenciar seus preços em relação aos praticados por um concorrente e sendo essa uma ferramenta essencial para atrair clientes (MACHADO, 2013). Em geral, ao aplicar um desconto em determinado produto e anunciá-lo ao público em mídias como televisão, rádio, redes sociais, as campanhas possuem prazo determinado, objetivo definido e desconto/oferta estabelecidos para serem atrativos aos consumidores, sendo esses princípios de grande importância para ações promocionais (OGDEN e CRESCITELLI, 2007).

Apesar da importância desse processo para a competitividade do varejo, a decisão sobre quais produtos anunciar/promocionar, em quais canais e em qual período é um processo não sistematizado que depende de análises e discussões não-padronizadas e dos profissionais envolvidos na decisão dentro da empresa. Essa ausência de um método de apoio à tomada de decisão faz com que as mesmas sejam tomadas sem se saber se consistem na opção viável ótima e, conseqüentemente, dá margem ao questionamento: será que a empresa não está desperdiçando oportunidades de lucro, que poderia ter se anunciado outro mix de produtos?

Nesse sentido, a Pesquisa Operacional tem se mostrado capaz de auxiliar na tomada de decisões complexas por meio da representação dos problemas usando modelos matemáticos, o que permite ao gestor tomar decisões com relação a problemas complexos sobre os quais convém ser aplicada a ótica científica (MARINS, 2011). Mais especificamente relacionado à área de Marketing, a Pesquisa Operacional possui aplicações que surgiram por volta da década de 1970, cerca de 10 anos após ter se tornado um campo de modelagem e otimização com aplicações em praticamente todas as áreas da sociedade bem como do Marketing ter passado a ser considerado uma área organizacional de gestão e, principalmente, após o surgimento do conceito de mix ou composto de marketing. Tal conceito deu abertura para uma abordagem analítica, quantitativa e para a introdução do conceito de modelos de marketing (WIERENGA, 2010).

Nesse cenário é que, perante o Marketing, a Pesquisa Operacional teve seu potencial reconhecido para apoio a tomadas de decisões e começou a desempenhar um importante papel na área dos modelos de marketing, que passaram a ser utilizados em problemas de precificação, alocação de força de vendas, previsão de demanda e controle de estoque, publicidade e planejamento/programação de mídia (WIERENGA, 2010).

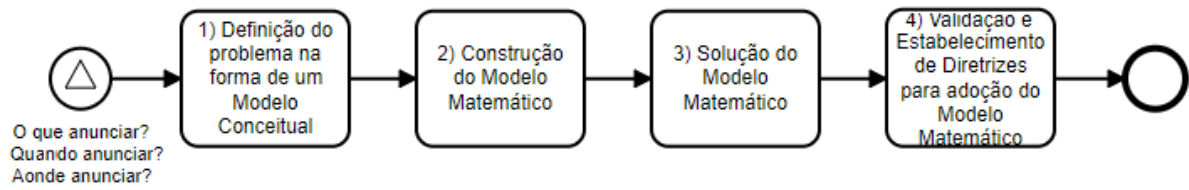
De fato, a literatura traz inúmeros exemplos da aplicação da Pesquisa Operacional nos processos de Marketing. Especificamente com relação ao processo de *advertising*, observa-se sua utilização na escolha dos canais e mídias para anúncio de determinados produtos, considerando restrições orçamentárias, como é o caso de Brown e Warshaw (1965), Bass e Lonsdale (1966), Aaker (1975), Steuer e Oliver (1976), Ahmed (1984) e Bhatia, Wagh, Jalan, Pandey & Dias (2018). Além das variáveis destes estudos (mídias disponíveis e orçamento disponível), observa-se a consideração do mix ideal a ser anunciado em estudos como o de Prasad e Reddy (2017), e da necessidade de alinhamento entre produção e Marketing despontada no modelo proposto por Thomas (1971). Além disso, estudos contemporâneos passam a tratar do planejamento de marketing, como o modelo proposto por Belenky e Belenkii (2002), e de marketing digital como proposto por Sodhi (2001).

No âmbito do processo de *advertising* e mais especificamente com relação às etapas de seleção e planejamento/programação de mídia, uma vez entendendo o contexto de forte competitividade no segmento varejista de supermercados e a complexidade envolvida nesse processo de decisão, é que está inserida a questão da presente pesquisa: Como subsidiar, por meio da Pesquisa Operacional, a decisão por quais produtos serem anunciados, em quais mídias e em quais períodos, de modo a se maximizar o lucro de uma loja? Tal questão consiste em um problema de maximização de lucros sob abordagem determinística e constitui uma *gap* teórico, visto que na literatura não são encontradas aplicações que considerem de modo concomitante a seleção da mídia e os produtos a nela serem anunciados, mas somente a mídia e respectivos investimentos a serem realizados.

Buscando responder a tal questionamento, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo matemático para a programação de anúncios de produtos em múltiplas mídias utilizando Programação Linear Inteira, a fim de maximizar o lucro da loja ao longo de um horizonte de planejamento de um mês.

2. Metodologia

A pesquisa foi executada a partir *i)* da definição do problema na forma de um modelo conceitual (verbal) a partir de uma abstração da realidade, *ii)* da construção do modelo matemático em si a partir de uma abstração do modelo conceitual, *iii)* da solução do modelo por meio solver comercial Gurobi versão 9.0.2 e *iv)* da validação do modelo matemático e do estabelecimento de diretrizes para sua adoção. Tal método está representado na Figura 1.



Fonte: Dos Autores (2020)

A definição do problema na forma de um modelo conceitual se deu a partir da estruturação de forma organizada de dados e informações brutas levantados pelos autores e fornecidos por um supermercado pertencente a uma grande rede com atuação regional, em termos de premissas, decisões, informações prévias, objetivo bem como restrições envolvidas ao contexto em questão.

A construção do modelo matemático em si se deu a partir da estruturação em funções matemáticas do modelo conceitual definido no passo anterior. Nessa etapa foram realizadas simplificações que consistiram na desconsideração das categorias às quais os produtos pertencem, do custo unitário de manutenção de estoque dos produtos e da eventual ocorrência de sobreposição de estoque dos mesmos. O custo unitário de estoque não foi levado em conta porque o aspecto financeiro não foi considerado um fator de restrição para o problema – ao invés disso foi considerado o fator limitação do espaço de armazenagem -, e a ocorrência de sobreposição de estoque não foi considerada porque assumiu-se uma acurácia tal para a demanda incrementada prevista para a campanha que admitiu-se que esta não ocorre, ou seja, que os produtos entregues para estoque no depósito da loja serão consumidos dentro do intervalo de tempo previamente definido para a campanha em questão.

A solução do modelo matemático se deu pela implementação do mesmo no solver comercial Gurobi versão 9.0.2 por intermédio de sua biblioteca Gurobipy, interface da linguagem de programação utilizada Python, e executado com a configuração padrão de seus parâmetros e tempo limite de 1.800 segundos em um computador com processador Intel Core i5-5200U @ 2.20 GHz e 8.0 GB de memória RAM no sistema operacional Microsoft Windows 10 de 64 bits.

A validação do modelo bem como o estabelecimento de diretrizes para sua adoção foram realizados por meio de consulta a um especialista no ramo supermercadista, a quem foram mostradas as premissas do modelo, as simplificações da realidade presentes no mesmo bem como os resultados obtidos, e solicitado um *feedback* a respeito de sua aplicabilidade e coerência com os objetivos e restrições do sistema real.

3. Resultados

Os resultados do trabalho estão apresentados em termos do modelo conceitual (seção 3.1) e modelo matemático proposto (seção 3.2) bem como em termos da solução (seção 3.3), validação e diretrizes para aplicação (seção 3.4) do modelo matemático no contexto real.

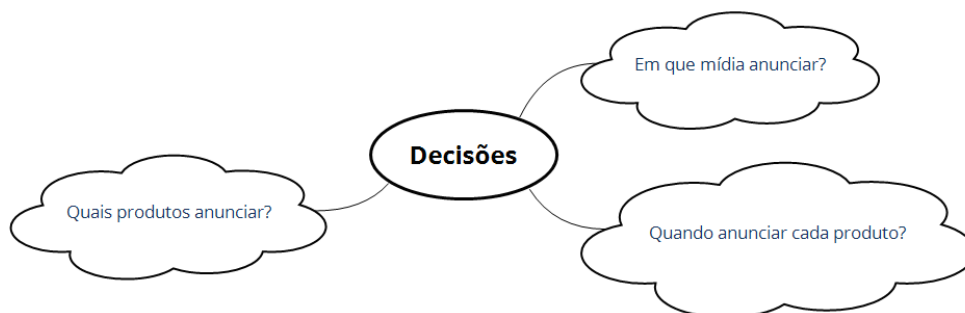
3.1. Modelo Conceitual

O modelo conceitual representa sistematiza premissas e decisões envolvidas, as informações prévias existentes, o objetivo a ser alcançado bem como das restrições envolvidas ao mesmo, conforme apresentados nas seções a seguir.

3.1.1. Premissas e Decisões envolvidas ao Modelo Conceitual

As premissas do modelo proposto são *i*) a existência de um mix suficientemente grande de produtos que compõem o portfólio da empresa, *ii*) a possibilidade de quaisquer produtos serem anunciados, *iii*) a existência de múltiplas mídias passíveis de escolha para anúncio e *iv*) a presença de diversos períodos dentro do horizonte de planejamento estipulado, de um mês. Tais premissas combinadas, conforme representação da Figura 2 a seguir, configuram as variáveis a serem decididas com vistas à maximização do lucro mensal da empresa.

Figura 2 – Decisões a serem tomadas



Fonte: Dos Autores (2020)

Essas variáveis compreendem às decisões sobre quais produtos anunciar dentre todos que compõem o portfólio da empresa, em qual ou quais das múltiplas mídias anunciar e quando fazer os respectivos anúncios, dentro do horizonte de planejamento em questão.

3.1.2. Parâmetros do Modelo Matemático

Os parâmetros do modelo matemático são aqueles que foram levantados durante a definição do problema e estão listados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do Modelo Matemático

Informações Prévias	
Quantidade de produtos;	N
Quantidade de mídias;	K
Horizonte de tempo;	T
Capacidade Volumétrica do depósito onde os produtos são armazenados	W
Demanda Nominal de cada produto	d_i
Lucro unitário nominal de cada produto	p_i
Volume de cada produto	v_i
Coefficiente de Incremento de Demanda ao próprio produto i anunciado	g_k
Fator de Correção do Lucro unitário nominal do produto i quando este está em campanha	l_k
Quantidade Máxima de Produtos a ser anunciados em cada mídia	M_k

Fonte: Dos Autores (2020)

Os valores utilizados para esses parâmetros são apresentados na seção 3.2.2 adiante, já como um componente do modelo matemático formalizado.

3.1.3. Objetivo e Restrições envolvidas ao Modelo Conceitual

O objetivo do problema em questão consiste na maximização do lucro mensal da empresa, considerando o lucro e demanda de produtos anunciados e não anunciados, em função das decisões a serem tomadas, e está sujeito a restrições de que determinado produto só pode ser veiculado em uma única mídia no período e também no horizonte de planejamento em questão, que cada mídia não pode receber mais do que determinada quantidade de produtos para anúncio e, por fim, que o volume ocupado pelo estoque dos produtos não pode ultrapassar a capacidade de estocagem do armazém.

3.2. Modelo Matemático Proposto

O modelo matemático de programação linear formalizado para o problema em questão é composto por variáveis de decisão, parâmetros, função objetivo e restrições, conforme apresentado a seguir.

3.2.1. Variáveis de Decisão e Índices do Modelo Matemático

A variável de decisão do modelo é representada por x_{ikt} , uma variável binária tal que $x_{ikt} \in \{0,1\}$, sendo, portanto, uma variável binária que indica, por meio dos índices i , k e t , respectivamente, se o produto i está ou não anunciado na mídia k no período t . Quando o produto está anunciado, a variável de decisão assume valor 1, e quando não está assume valor 0.

3.2.2. Valores dos Parâmetros do Modelo Matemático

Foram considerados na implementação do modelo matemático no solver N = 280 produtos, K = 4 mídias e um horizonte de planejamento de T= 28 dias. Além disso, a capacidade do depósito da loja é de $W = 16 \text{ m}^3$ (vale ressaltar que o tamanho total do depósito é maior que este, mas este é o espaço destinado aos 280 produtos analisados). A Tabela 2 a seguir apresenta os parâmetros nominais d_i , p_i e v_i relativos a parte dos produtos que compuseram a solução do modelo matemático.

Tabela 2 - Parâmetros d_i , p_i e v_i

Produto	Demanda Nominal	Lucro Nominal	Volume
(i)	Unitária (d_i)	Unitário (p_i)	Unitário em m^3 (v_i)
1	1,44	R\$ 2,66	0,025375
2	1,29	R\$ 2,87	0,026048
3	1,2	R\$ 0,29	0,000288
4	1,32	R\$ 2,12	0,01218
5	1,27	R\$ 4,26	0,014904
6	2,46	R\$ 0,79	0,012844
7	14,06	R\$ 0,11	0,01242
8	4,94	R\$ 0,69	0,034884
9	2,11	R\$ 3,89	0,008
10	1,06	R\$ 18,76	0,020336
		.	
		.	
		.	
280	1,29	R\$ 12,74	0,00147

Fonte: Dos Autores (2020)

Esses parâmetros constituem as demandas nominais unitárias diárias (d_i), os lucros nominais unitários (p_i) e os volumes unitários (v_i) relativos a cada um dos produtos que foram implementados na solução do modelo matemático. Indicam, respectivamente, a quantidade diária requerida de cada produto, o lucro unitário gerado pela venda de cada um deles bem como o espaço, em metro cúbico, ocupado por cada um quando armazenados no depósito.

A Tabela 3 apresenta os parâmetros g_k , l_k e M_k , relacionados às mídias que podem ser escolhidas para anúncio.

Tabela 3 - Parâmetros g_k , l_k e M_k .

k	Mídia	Coefficiente de Incremento de Demanda (g_k)	Fator de Correção do Lucro (l_k)	Quantidade Máxima de Produtos Anunciados (M_k)
1	Televisão	13	0,4	10
2	Rádio	3	0,6	10
3	Redes Sociais	3,5	0,7	10
4	Panfleto	1,5	0,8	40

Fonte: Dos Autores (2020)

Os Coeficiente de Incremento de Demanda (g_k) para a televisão, rádio, redes sociais e panfleto acarretam no incremento da demanda nominal de cada produto (p_i) anunciado nessas mídias em 13, 3, 3,5 e 1,5 vezes, respectivamente. Os Fatores de Correção do Lucro (l_k), por sua vez, acarretam na redução do lucro unitário nominal de cada produto (p_i) a 40%, 60%, 70% e 80%, respectivamente. Por fim, a Quantidade Máxima de Produtos Anunciados (M_k) indica que é possível anunciar no máximo 10 produtos na televisão, 10 no rádio, 10 em redes sociais e 40 em panfleto.

3.2.3. Função Objetivo e Restrições do Modelo Matemático

A função objetivo foi então definida como conforme a equação 1 e tem por objetivo maximizar lucro mensal da empresa por meio da obtenção de valores ótimos para as variáveis de decisão.

$$Maximizar Z = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T x_{ikt} * (g_k * d_i) * (l_k * p_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{it} * d_i * p_i \quad (1)$$

O índice i identifica o produto na loja dentre o universo de N produtos, k identifica a mídia onde ocorrerá a divulgação dentre K possíveis, e t identifica o dia de anúncio entre os T dias planejados.

Nesse sentido, o lado esquerdo da função objetivo, que está relacionado à variável de decisão x_{ikt} , representa o lucro total dos produtos inseridos em campanhas de divulgação, considerando que sua demanda nominal diária d_i é corrigida por g_k , que é o incremento da demanda quando o produto é anunciado na mídia k (entende-se que há mídias mais efetivas do que outras para atrair clientes para a loja para adquirir aquele produto anunciado), e seu lucro nominal diário p_i é corrigido por l_k , que é o fator de correção do lucro unitário nominal de qualquer produto quando anunciado na mídia k (entende-se como obrigatório no anúncio de um produto a redução de lucro/desconto para tornar a campanha atrativa, e para cada mídia k é necessário um desconto diferente para atrair clientes a comprar aquele produto anunciado).

Por fim, o lado direito da equação trata do lucro dos produtos que não foram anunciados em nenhuma mídia, e está relacionado à variável auxiliar $y_{it} \in \{0,1\}$, que assume valor 1 quando $x_{ikt} = 0$ e valor 0 quando $x_{ikt} = 1$.

Adicionalmente à função objetivo, foram estabelecidas as seguintes restrições:

$$\sum_{k=1}^K x_{ikt} + y_{it} = 1 \quad \forall i, t \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^K x_{ikt} \leq 1 \quad \forall i, t \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T x_{ikt} \leq 1 \quad \forall i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ikt} \leq M_k \quad \forall k, t \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K (x_{ikt} * g_k * d_i * v_i) + \sum_{i=1}^N (y_{it} * d_i * v_i) \leq W \quad \forall t \quad (6)$$

Tem-se, então, que um produto pode ser anunciado ou não (Equação 2) e que um produto i só pode ser divulgado em uma mídia k no período t (Equação 3). Além disso, a Equação 5 estabelece o limite de produtos anunciados em cada mídia conforme o parâmetro M_k , que em geral está relacionado às políticas internas de marketing de cada supermercado. Outra restrição que retrata uma política de marketing é demonstrada na Equação 4, que define

que um produto só pode ser anunciado uma vez dentro do período $T = 28$ dias (uma vez ao mês).

Por fim, a Equação 6 estabelece a capacidade de armazenamento em metro cúbico W do depósito da loja, que é limitado, considerando que este deve comportar o volume v_i da demanda adicional $g_k * d_i$ devido ao anúncio do produto i , e também o volume v_i demanda nominal de todos os produtos não anunciados. Assim, restringem-se os produtos anunciados, de forma que não se anunciem produtos que não conseguirão ser armazenados no dia.

3.3. Solução e Resultados do Modelo Matemático

Após implementação do modelo no solver comercial Gurobi e execução do mesmo pelos 1.800 segundos fixados a melhor solução objetivo do modelo foi obtida, tendo o solver explorado 293.653 nós diferentes (2.285.361 iterações simplex) em 1800,11 segundos, encontrando nove soluções factíveis. A melhor solução encontrada obteve *gap* de 0,0303% e representa um lucro de R\$ 237.500,45 ao final do horizonte de 28 dias. A Tabela 4 apresenta parte dos resultados obtidos pelas iterações ao resolver o modelo pelo solver Gurobi.

A partir da penúltima iteração apresentada na Tabela 4, o resultado encontrado (Incumbent ou Best Objective) e o limite superior calculado para o modelo (Best Bound), assim como o *gap* entre os mesmos, se mantêm o mesmo (R\$237.427,99, R\$237.500,45 e 0,03%) até o final da execução, mas o solver continua executando iterações até atingir o tempo limite de 1.800 segundos estabelecido para sua execução, na tentativa de encontrar uma melhor solução.

Além disso, foram simulados dois cenários diferentes da solução ótima, para elucidar o range de soluções possíveis. O primeiro cenário diz respeito ao mínimo de lucro que pode ser obtido pela loja em estudo, quando nenhum produto é anunciado em nenhuma mídia durante nenhum período. Já o outro cenário, diz respeito ao máximo de lucro que pode ser obtido: ou seja, se nenhuma restrição for aplicada, é possível anunciar todos os produtos na mídia de maior impacto durante todos os períodos. Todos estes cenários podem ser observados na Tabela 5.

Tabela 4 – Resultados obtidos pelo solver Gurobi.

	Nodes		Current Node			Objective Bounds			Work	
	Expl	Unexpl	Obj	Depth	IntInf	Incumbent	Best Bound	Gap	It/Node	Time
	0	0	R\$237.515,00	0	42	R\$70.761,67	R\$237.515,00	236%	-	0s
H	0	0				R\$222260,57	R\$237.515,00	6,86%	-	0s
H	0	0				R\$234.164,33	R\$237.515,00	1,43%	-	0s
H	0	0				R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	1s
	0	0	R\$237.515,00	0	47	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	1s
	0	0	R\$237.515,00	0	42	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	2s
	0	0	R\$237.515,00	0	76	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	2s
	0	0	R\$237.515,00	0	71	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	2s
	0	0	R\$237.515,00	0	45	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	3s
	0	0	R\$237.515,00	0	47	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	3s
	0	0	R\$237.515,00	0	52	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	3s
	0	0	R\$237.515,00	0	52	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	3s
	0	2	R\$237.515,00	0	52	R\$237.076,24	R\$237.515,00	0,19%	-	3s
	28	22	R\$237.500,38	15	46	R\$237.076,24	R\$237.504,25	0,18%	24,1	5s
	235	296	R\$237.500,38	109	44	R\$237.076,24	R\$237.504,25	0,18%	11,7	11s
	507	496	R\$237.500,38	257	48	R\$237.076,24	R\$237.504,25	0,18%	9	16s
H	543	496				R\$237.183,28	R\$237.504,25	0,14%	8,9	16s
H	774	679				R\$237.268,33	R\$237.504,25	0,10%	7,7	22s
	926	805	R\$237.497,15	509	36	R\$237.268,33	R\$237.504,25	0,10%	7,2	25s
H	1055	790				R\$237.297,93	R\$237.504,25	0,09%	7,4	25s
H	1390	1120				R\$237.336,49	R\$237.504,25	0,07%	7,6	28s
	1573	1306	R\$237.473,33	823	29	R\$237.336,49	R\$237.504,25	0,07%	8	30s
	2324	1864	R\$237.496,49	86	45	R\$237.336,49	R\$237.504,25	0,07%	8,4	36s
	2825	2096	R\$237.485,52	416	58	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	8,8	40s
	2988	2279	R\$237.485,98	52	47	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	12,6	46s
	3161	2432	R\$237.499,94	87	55	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	12,3	51s
	3429	2613	R\$237.499,90	144	45	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	12,1	55s
	3787	2876	R\$237.499,62	253	45	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	12	60s
	4168	3199	R\$237.494,94	345	38	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	12,4	65s
	4751	3661	R\$237.493,94	466	39	R\$237.336,49	R\$237.503,50	0,07%	12,5	70s
H	5380	3453				R\$237.427,99	R\$237.500,45	0,03%	12,1	72s
						.				
						.				
						.				
	293513	249025	R\$237.499,92	323	41	R\$237.427,99	R\$237.500,45	0,03%	7,7	1800s

Fonte: Dos Autores (2020)

Tabela 5 - Mínimo, Máximo e Solução Máxima para o Lucro

Cenário	Lucro Obtido
Mínimo (Sem Anúncios)	R\$ 70.761,67
Modelo Proposto	R\$ 237.500,45
Máximo (Sem Restrições)	R\$ 9.199.017,63

Fonte: Dos autores (2020)

De fato, o cenário sem restrições não é aplicável, por representaria 280 produtos anunciados na televisão todos os dias. Porém, é possível observar o quanto o modelo simulado traz de diferença do cenário mínimo, sem anúncio nenhum, reforçando a importância de ações promocionais no varejo conforme proposto por Machado (2013).

Além disso, com a modelagem foi possível observar que uma das restrições de maior impacto foi a capacidade do depósito $W = 16 \text{ m}^3$. Tem-se que, pela demanda nominal d_i e pelo volume nominal v_i de cada produto, seriam necessários $15,84595 \text{ m}^3$ para armazenar os produtos sem anúncio nenhum. Ou seja, esse é o mínimo de capacidade necessária para atender à demanda da loja, e caso fosse o espaço máximo disponível, o máximo de lucro obtido seria o do cenário Mínimo descrito na Tabela 5. Como o parâmetro inserido foi de 16 m^3 , foi possível obter o lucro do Modelo Proposto, 235% maior que o mínimo. Então, foram feitas simulações alterando este parâmetro para observar oportunidade de aumento no lucro, que podem ser visualizadas na Tabela 6.

Tabela 6 - Variação do Lucro Máximo em relação ao parâmetro W

W (m³)	Lucro Max	Variação Lucro	Variação W
15,846	R\$ 70.761,67	-	-
16	R\$ 237.422,95	236%	1%
20	R\$ 387.142,36	447%	26%
24	R\$ 395.404,52	459%	51%
28	R\$ 396.770,82	461%	77%
32	R\$ 396.770,82	461%	102%
36	R\$ 396.770,82	461%	127%

Fonte: Dos Autores (2020)

Portanto, uma decisão que pode ser derivada da Tabela 6, é o investimento em um aumento no depósito, ou pelo menos a simulação do espaço ideal no momento da construção de uma nova loja (considerando, nesse caso, redes varejistas em expansão). Porém, como

mostra a Tabela 6, a relação não é linear, como pode-se notar a partir de $W \geq 24 \text{ m}^3$, quando a variação no lucro passa a aumentar muito pouco em relação à variação no espaço de armazenagem, até um ponto onde não varia mais, em $W \geq 28 \text{ m}^3$.

Outra restrição de grande impacto no lucro modelado é a restrição (4), de limitação da quantidade de vezes em que um mesmo produto pode ser anunciado no período T . Nesse caso, foi optado por não anunciar cada produto i mais do que uma vez ao mês, mas ao optar-se por trabalhar com limitações quinzenais em vez de mensais, decompondo (4) em duas restrições para cada quinzena do mês, o lucro alcançado pela solução ótima praticamente dobrou, passando de R\$ 237.500,45 para R\$400.423,09.

Por fim, por se tratar de um modelo de planejamento de campanhas marketing, além do resultado do lucro maximizado, também foi implementada uma forma de imprimir o planejamento dos 28 dias simulados. Nesse caso, a Tabela 7 ilustra o que seria o resultado entregue ao gestor de marketing, considerando o modelo original proposto, sem as observações da Tabela 5 e sem a decomposição da restrição (4) como quinzenal.

A partir do resultado ilustrado na Tabela 7 é possível conhecer a quantidade projetada de venda para cada produto (demanda incrementada) bem como, conseqüentemente, o lucro decorrente de tais vendas para cada período e para o horizonte de planejamento em questão.

3.4. Validação e Diretrizes para Adoção do Modelo Matemático

A validação do modelo matemático indicou que o modelo é capaz de otimizar o lucro respeitando as limitações pertinentes ao modelo de negócio. As seguintes diretrizes devem ser adotadas para que tais resultados sejam alcançados:

O modelo matemático desenvolvido demanda o abastecimento dos parâmetros mensalmente, e entrega um planejamento de vendas completo para o período, conforme as políticas de marketing do supermercado. A partir dele, podem ser continuados os processos de marketing de maneira padronizada.

A função objetivo e as restrições definidas definem um possível escopo de decisão que o marketing de um supermercado precisa considerar ao definir os produtos que anunciará em diferentes mídias e períodos. Entretanto, podem haver variações nas políticas internas de cada empresa, e nesse caso são indicadas adaptações no modelo antes de utilizá-lo na prática.

Tabela 7 - Planejamento de Campanhas

Dia	Mídia	Produto
1	1	137
1	1	251
1	1	255
1	4	10
1	4	12
1	4	13
1	4	27
1	4	78
1	4	85
1	4	135
1	4	139
1	4	165
1	4	186
1	4	222
1	4	235
1	4	270
1	4	274
2	1	192
2	1	279
2	4	47
2	4	160
	.	
	.	
	.	
28	4	266

Fonte: Dos autores (2020)

Devem ser considerados fatores tais como *a)* o desempenho de vendas (demanda) e lucro do produto promocionado, *b)* demanda e o lucro dos produtos não promocionados, *c)* quantidade necessária de suprimentos a serem estocados para atendimento às demandas, *d)* bem como limitações físicas da área de armazenagem, *d)* a frequência e exclusividade dos produtos anunciados entre as mídias; *e)* a quantidade máxima ou mínima de produtos anunciados nas mesmas. Esses fatores

4. Considerações Finais

Este trabalho propôs um modelo matemático para o problema de programação de promoções de produtos em múltiplas mídias, visando a maximização do lucro em determinado horizonte de planejamento. Instâncias de teste foram geradas e solucionadas usando o solver comercial Gurobi. O modelo proposto foi validado e diretrizes foram estabelecidas para sua adoção.

Como inferências teóricas, esse trabalho trouxe avanço nos estudos científicos da Pesquisa Operacional aplicada ao Marketing, no âmbito do processo de *advertising* e às suas etapas de seleção e planejamento/programação de mídia, cobrindo o *gap* teórico correspondente à ausência de aplicações que considerem de modo concomitante à seleção da mídia, os produtos a nela serem anunciados.

Como implicações práticas, esse trabalho contribuiu com o aporte de um modelo matemático que pode ser utilizado pelas organizações para subsidiar suas decisões no que diz respeito à programação de anúncios de seus produtos nas múltiplas mídias disponíveis, de forma racional e otimizada no que tange ao lucro decorrente das mesmas em determinado horizonte de planejamento.

Como oportunidades de pesquisas futuras decorrentes da realização desse trabalho está a consideração dos fatores que foram desconsiderados quando da simplificação realizada na etapa da construção do modelo matemático: *i*) categoria dos produtos, *ii*) custo unitário de manutenção de estoque dos produtos e *iii*) eventual ocorrência de sobreposição de estoque no depósito da loja, além *iv*) do prazo de validade dos produtos; *v*) da existência de produtos substitutos, *vi*) da sazonalidade das demandas nominais dos produtos, *vii*) do horário dos anúncios a serem realizados nas respectivas mídias, *viii*) da influência de produtos anunciados sobre produtos não anunciados (“cross-selling effect”) e, por fim, *ix*) da possível saturação do incremento de demanda à medida da ocorrência dos anúncios de determinado produto.

REFERÊNCIAS

AAKER, David A. ADMOD: An Advertising Decision Model. **Journal of Marketing Research**, 12(1), 37–45. 1975

AHMED, Nazim U. An efficient 0–1 integer programming algorithm for advertising media selection. **Journal of the Academy of Marketing Science**, 12(1), 191–204. 1984.

BASS, Frank M.; LONSDALE, Ronald T. An Exploration of Linear Programming in Media Selection. **Journal of Marketing Research**, 3(2), 179–188. 1966.

BELENKY, Alexander S.; BELENKII, I. Optimization of planning an advertising campaign of goods and services. **Mathematical and Computer Modelling**, 35(13), 1391–1403. 2002.

BHATIA, Sanishtha; WAGH, Shireen Samir; JALAN, Shanav; PANDEY, Sanchit; DIAS, Schnella. Applications of operations research in advertising media. **International Journal of Advance Research and Development** 3, 86-91. 2018.

BROWN, Douglas. B.; WARSHAW, Martin R. Media Selection by Linear Programming. **Journal of Marketing Research**, 2(1), 83–88. 1965.

MACHADO, Diego Lemos. **A percepção do consumidor em relação às ações de promoção de vendas: um estudo de caso em supermercado** (Monografia de Graduação). Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Fortaleza-CE, 95 p. 2013

MARINS, Bianca Ramos; ARAÚJO, Inesita Soares de; JACOB, Silvana do Couto. A propaganda de alimentos: orientação, ou apenas estímulo ao consumo? **Ciência & Saúde Coletiva**, 16(9), 3873-3882. 2011.

OGDEN, James R.; CRESCITELLI, Edson. **Comunicação integrada de marketing: conceitos, técnicas e práticas**. 2 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2007.

Prasad, A. V. S.; REDDY, Y Raghunatha. Optimization of Media Mix Planning in Health Care System by an AHP Based Goal Programming Model. **International Journal of Trend in Scientific Research and Development**, Volume-1(Issue-4), 564–570. 2017.

SODHI, Manmohan S. Applications and Opportunities for OR/MS in Internet-Enabled Supply Chains and Electronic Marketplaces. **Interfaces**, 31, 56–69. 2001.

STEUER, Ralph E ; OLIVER, Richard L Steuer. An application of multiple objective linear programming to media selection. **Omega**, 4(4), 455–462. 1976.

THOMAS, Joseph. Linear Programming Models for Production-Advertising Decisions. **Management Science**, 17(8), B-474-B-484. 1971.

WIERENGA, Berend. The Interface of Marketing and Operations Research. In: Kroon, L., Li, T., Zuidwijk, R. (ed.). **Liber Amicorum in Memoriam of Jo van Nunen**. Breda, The Netherlands: Rotterdam School Of Management, Erasmus University, Cap. 4. p. 83-93. 2010.