AS CARTEIRAS DE INVESTIMENTO E A SEMIVARIÂNCIA

christóvão thiago de brito neto
Professor Adjunto II do Programa de Engenharia de Produção da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) - E-mail: brito@ufrnet.br

joão felipe volkmer
Graduando em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Abstract: *This paper examines the concept of semivariance and its utilization as a risk estimation in the minimum variance portfolio applying the Markowitz theory . Considering a five per cent level of significance, the Wilcoxon nonparametric test results suggest that its utilization in the period of analysis along with the suppositions adopted do not produce significative modifications in the expected returns in comparison to the portfolio using the variance as a risk measurement. There are significant alterations in the portfolio composition, proved by using the Wilcoxon nonparametric test considering a five per cent level of significance. However, there are no significatives alterations in the expected returns. Yet, tests through the nonparametric Chi-Square statictic test if the series presented are normal considering a five percent significance level. Thus, the article came to the conclusion that the series do not obey the Gauss curve.*
Key words: semivariance ; expected return ; portfolio analysis

1 – Introdução.

Os investidores associam risco à variabilidade das taxas de retorno dos ativos, sendo o desvio padrão e a variância as medidas tradicionais de risco.

Um inconveniente potencial sobre o uso dessas medidas na análise do risco é que elas interpretam tanto os desvios positivos como os negativos em relação ao retorno esperado como indesejáveis.

Na prática, no entanto, sabe-se que os investidores acolhem com prazer as surpresas positivas, ou seja, aquelas desvios que ultrapassam o retorno pretendido. Uma medida natural de risco deveria focalizar apenas os resultados ruins. Com efeito, os retornos acima da média ou de um referencial qualquer não deveriam ser computados e, por conseguinte, adicionados ao risco da carteira.

Os investidores tratam diferentemente os riscos de perda e os riscos de ganho. Nas decisões que envolvem perdas, o investidor está disposto a correr riscos. Entretanto, ao tomarem uma decisão envolvendo ganhos, o investidor mostra-se avesso ao risco.

Se os retornos dos ativos não estiverem normalmente distribuídos em uma curva de Gauss (ou normal), a variância poderá não refletir as incertezas reais da carteira (Bernstrein, 1997, p. 259).

No entanto, pesquisas recentes têm evidenciado que os retornos de muitos ativos estão distribuídos de forma assimétrica. Quando uma curva é positivamente inclinada, há mais retornos abaixo da média do que acima. Contrariamente, se a curva tem uma inclinação negativa, há mais retornos acima da média do que abaixo (Levine, 1999, p. 186-187).

Dadas as deficiência do desvio padrão e da variância como medidas de risco, tem-se observado o uso de novas forma de mensuração do risco, como o *downside risk* (Elton & Gruber, 1995, p. 50). Esta nova abordagem visa discernir os bons retornos dos retornos ruins. Bons retornos são aqueles acima de um referencial previamente estabelecido. Retornos ruins são aqueles observados abaixo do referencial. De acordo com essa teoria, apenas os retornos ruins são considerados como risco.

Uma das formas de se medir o risco pela abordagem *downside risk* é utilizando-se uma medida chamada semivariância. A semivariância relativa, termo proposto por Harry Markowitz em seus estudos que criaram a moderna teoria de carteiras e objeto de estudo desse artigo, é uma medida alternativa de risco que utiliza somente as diferenças negativas em relação a uma média dos retornos ou um referencial qualquer.

O uso da semivariância como medida de risco alternativa pode ser fundamentada em algumas premissas, dentre as quais podemos destacar as seguintes:

- A semivariância considera os objetivos do investidor como um referencial ao passo que a variância não o faz;
- A semivariância define risco em anuência com o investidor, ou seja, de acordo com sua percepção de risco. Já o desvio padrão e a variância tradicional não procura um objetivo ou referencial, apenas mede a dispersão dos retornos ao redor da média; e
- A semivariância reconhece que as distribuições de uma carteira podem ser simétricas ou assimétricas. Já o desvio padrão convencional assume que todas distribuições são simétricas, podendo ocasionar miopias na análise do risco.

Este trabalho responderá as seguintes perguntas, ambas com nível de significância de 5%:

1 – o pressuposto da curva normal é obedecido pelas séries de rentabilidades dos ativos em análise?

2 – existe uma mudança significativa na composição da carteira de mínima variância ao utilizarmos o conceito de semivariância?

3 – as rentabilidades das carteiras de mínima variância compostas com os conceitos variância (PLENA) e semivariância (SEMI) são significativamente diferentes?

2 - O Problema da Carteira.

Freqüentemente, os investidores não estão interessados em investir todo seu dinheiro em um único ativo. Há maior interesse em alocar o dinheiro entre uma carteira de valores mobiliários composta por um número variado de ativos. A adoção de vários ativos em uma carteira tem o propósito de proteger o investidor através da diversificação.

O retorno esperado de uma carteira é exatamente a média ponderada dos retornos esperados sobre os valores mobiliários de cada componente, nos quais os pesos são iguais à proporção que cada valor mobiliário representa na carteira, de acordo com a fórmula abaixo $\bar{R}_C = \sum_{i=1}^{N} X_i E_i$, onde $\bar{R}_C$ é o retorno esperado da carteira, X_i é o valor percentual investido no ativo i e E_i é o retorno esperado no ativo i.

O risco da carteira por sua vez exige um pouco mais de atenção. O cálculo é efetuado utilizando-se a abordagem criada pelo economista Harry Markowitz, em 1952, quando publicou o artigo intitulado *portfolio selection*, sendo usualmente medida pela variância. A variância mede as variabilidades positivas e negativas dos retornos ao redor de uma média, considerando-as sempre como não desejáveis.

O risco da carteira não é a média ponderada dos riscos dos ativos que a compõe. Depende, também, do comportamento conjunto dos mesmos. Este nos mostra como os retornos dos ativos são correlacionados, isto é, a tendência de andarem juntos. Duas medidas são utilizadas para medir este comportamento: covariância e a correlação.

A covariância, que é afetada pela escala usada para medir as variáveis, é dada por σ_{ij}. Um valor positivo sugere a tendência de andarem juntos, negativo em direções opostas e próximo a zero pouca ou nenhuma relação.

Juntando as variâncias e as covariâncias e supondo apenas dois ativos na carteira podemos estimar a variância da carteira σ_c^2 que é dada por:

$$\sigma_c^2 = E\left(R_c - \overline{R}_c\right)^2 = E\left(X_1 R_{1t} + X_2 R_{2t} - \left(X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2\right)\right)^2 \quad \therefore$$
$$\sigma_c^2 = E\left(X_1\left(R_{1t} - \overline{R}_1\right) + X_2\left(R_{2t} - \overline{R}_2\right)\right)^2 \quad \therefore$$
$$\sigma_c^2 = E\left(X_1^2\left(R_{1t} - \overline{R}_1\right)^2 + 2X_1X_2\left(R_{1t} - \overline{R}_1\right)\left(R_{2t} - \overline{R}_2\right) + X_2^2\left(R_{2t} - \overline{R}_2\right)^2 \right) \quad \therefore$$
$$\sigma_c^2 = X_1^2 E\left(R_{1t} - \overline{R}_1\right)^2 + 2X_1X_2 E\left(R_{1t} - \overline{R}_1\right)\left(R_{2t} - \overline{R}_2\right) + X_2^2 E\left(R_{2t} - \overline{R}_2\right)^2 \quad \therefore$$
$$\sigma_c^2 = X_1^2\sigma_1^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + X_2^2\sigma_2^2$$

Generalizando para N ativos obtemos:

$$\sigma_c^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 \quad + \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

Muitas pessoas, no entanto, avaliam que o risco pode ser definido como a obtenção de um resultado inferior ao da média ou qualquer outro referencial. Isto posto, os resultados positivos, ou seja, aqueles cujos valores excedem a média ou o referencial devem ser desconsiderados. De fato, os retornos acima da média ou do referencial não representam preocupação para os investidores.

A semivariância relativa é uma medida assimétrica centrada sobre o lado inferior da distribuição de probabilidade e evita penalizar bons desempenhos.

A semivariância pode ser calculada pela fórmula $\varsigma_i = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - T)^2}{N}$, sendo $(R_{it} - T)^2 = 0$ quando $R_i \geq T$, onde ς_i é a semivariância do ativo i, R_{it} é o retorno do ativo i no tempo t, T é o valor alvo e N é o número de observações.

3 – A Carteira de Mínima Variância.

A carteira de mínima variância otimiza as possibilidades de retorno frente a outras carteiras de ativos ou minimiza as possibilidades de perda. Para o caso mais comum de dois ativos, a variância é dada por:

$$\sigma_C = (X_1^2\sigma_1^2 + (1 - X_1)^2\sigma_2^2 + 2X_1(1 - X_1)\sigma_{12})$$

Tomando a primeira derivada em relação a X_1 e fazendo a primeira derivada igual a zero para minimizar a função e resolvendo para X_1 temos:

$$X_1 = \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_{12})}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})} \qquad \text{(Eq.1)}$$

Para ser um ponto de mínimo, a derivada segunda deve ter um valor positivo.

4 – Um Caso Prático.

O caso prático considerará os dois ativos financeiros de renda variável existentes no mercado: o IBOVESPA e o DÓLAR. O IBOVESPA é divulgado pela Bolsa de Valores de São Paulo sendo o melhor representante do mercado acionário. Utilizaremos a sua cotação de fechamento. O DÓLAR é divulgado pelo Banco Central do Brasil sendo o representante do mercado cambial. Utilizaremos a cotação de venda do dólar pronto (ptax). A principal vantagem de usarmos este dois ativos é que os mesmos avaliam desempenhos de mercados diferentes, sugerindo uma covariação próxima de zero. Os valores utilizados e o período da análise encontram-se no anexo.

O primeiro ponto é verificar se as duas séries são normais. Para tanto utilizaremos a estatística não-paramétrica QUI-QUADRADO (X^2) (Siegel, 1975, p.46). Esta técnica testa se as freqüências observadas estão suficientemente próximas das esperadas para justificar a hipótese nula de não existir diferença entre as freqüências, sugerindo ser a série normal.

A hipótese nula pode ser testada pela fórmula $\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$, onde O_i são os casos observados, E_i são os casos esperados e Σ indica o somatório para todas as k categorias, sendo k-1 os graus de liberdade. Os esperados serão baseados na distribuição normal.

Para a primeira série de 60 observações do IBOVESPA, temos uma média igual a 0,0033 e desvio padrão, como população, de 0,0281. Somando todas as distâncias achamos o valor de 18,63 que resulta num valor p = 0,017, calculado com 8 grau de liberdade, utilizando-se a função DIST.QUI do EXCEL. Tal probabilidade é menor do que 0,05, nos levando a rejeitar a hipótese nula. Os cálculos sugerem que a série do IBOVESPA não é normal.

Para a primeira série de 60 observações do DÓLAR realizamos o mesmo procedimento. Os momentos média e desvio padrão, como população, são respectivamente, 0,00069 e 0,0039. Somando todas as distâncias achamos o valor 16,01 que gera um valor p de 0,042, menor do que 0,05, nos levando a rejeitar a hipótese nula. Os cálculos sugerem que a série do DÓLAR não é normal.

O trabalho supõe que as conclusões tiradas acima, de não-normalidade, são válidas para os demais conjuntos de 60 observações dos ativos.

Então o pressuposto básico das séries obedecerem uma distribuição normal parece ser violado, possibilitando um exame da composição das carteira com a utilização do conceito de semivariância.

O segundo ponto consiste em estimar os valores das variâncias e covariâncias com pesos iguais, considerando os valores de dados como a população de interesse. Para tanto utilizamos a planilha EXCEL. As carteiras serão compostas com a utilização de 60 observações, acrescentando a rentabilidade mais recente e retirando a mais antiga. Para a carteira de 02 de março a matriz conterá rentabilidades de 30 de novembro a 01 de março. Para a carteira de 05 de março as rentabilidades serão de 01 de dezembro a 02 de março e assim sucessivamente, gerando 16 carteiras. O mesmo procedimento é usado para o conceito de semivariância.

De posse destes valores podemos calcular para cada data a carteira de mínimo risco com a utilização da equação 1, $X_1 = \dfrac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, onde σ_1^2 e σ_2^2 são as estimativas de risco dos ativos, σ_{12} é a estimativa da covariância, X_1 é o valor investido no ativo 1 e $1-X_1$ é o valor investido no ativo 2.

Considerando a covariância σ_{12} com valor zero e utilizando a mesma fórmula acima para as duas estimativas de risco, compomos as carteiras de mínimo risco para as respectivas datas, que estão na tabela 1 abaixo. Os valores das derivadas segunda são para plena e semi, respectivamente, de 0,209 e 0,125. Tais valores nos mostra que são pontos de mínimo. O trabalho supõe que tal conclusão é válida para os demais dias.

	Plena		Semi	
Data	Dólar	Ibovespa	Dólar	Ibovespa
02/03/01	0,9812	0,0188	0,9804	0,0196
05/03/01	0,9802	0,0198	0,9782	0,0218
06/03/01	0,9781	0,0219	0,9760	0,0240
07/03/01	0,9755	0,0245	0,9685	0,0315
08/03/01	0,9750	0,0250	0,9762	0,0238
09/03/01	0,9748	0,0252	0,9759	0,0241
12/03/01	0,9711	0,0289	0,9759	0,0241

13/03/01	0,9711	0,0289	0,9779	0,0221
14/03/01	0,9710	0,0290	0,9783	0,0217
15/03/01	0,9702	0,0298	0,9786	0,0214
16/03/01	0,9696	0,0304	0,9793	0,0207
19/03/01	0,9623	0,0377	0,9793	0,0207
20/03/01	0,9627	0,0373	0,9798	0,0202
21/03/01	0,9557	0,0443	0,9655	0,0345
22/03/01	0,9552	0,0448	0,9655	0,0345
23/03/01	0,9467	0,0533	0,9674	0,0326

Tabela 1: As composições das carteiras, considerando as variâncias e semivariâncias com 14 casas decimais.

O terceiro ponto consiste em examinar se a mediana das diferenças das composições das carteiras é igual a zero. Utilizaremos apenas um ativo para esta verificação, o DÓLAR. Se houver diferença para um ativo, há diferença para a carteira. Para tanto utilizaremos a estatística não-paramétrica prova de WILCOXON (Siegel, 1975, p. 84).

Esta prova considera o sentido e o valor das diferenças, atribuindo maior peso ao par que apresenta maior diferença do que a um no qual esta é pequena.

Devemos calcular a diferença entre os pares (PLENA – SEMI), eliminar o sinal menos, atribuir ao menor o posto 1 e ao maior o posto N, o tamanho da amostra, e no final retornar os sinais menos aos postos correspondentes.

Se somarmos os postos com sinal mais e os com sinal menos, essas duas somas devem ser aproximadamente iguais, a hipótese nula. A soma de todos os postos tem distribuição quase normal com $\mu = \frac{N(N+1)}{4}$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}$. Então $z = \frac{T-\mu}{\sigma}$ possui distribuição aproximadamente normal com média zero e desvio padrão unitário, onde o valor T é a menor soma dos postos de mesmo sinal e N é o número de postos.

Se $z \geq z_C$ rejeitamos a hipótese nula, caso contrário a aceitamos. Utilizaremos a prova unilateral já que prognosticaremos o sentido das diferenças.

Sejam as hipóteses:

H_0 : a utilização do conceito de semivariância não altera o valor investido no ativo DÓLAR;

H_1 : a utilização do conceito de semivariância altera o valor investido no ativo DÓLAR para menos.

A primeira, chamada de hipótese nula, nos diz que somando-se os postos com sinais mais e os com sinal menos teremos valores aproximadamente iguais. A mediana é aproximadamente igual a zero.

A segunda, chamada de hipótese alternativa, nos diz se existe alteração na composição das carteiras, prevendo sua direção.

O nível de significância de um teste (α) é o erro do tipo I, ou é a probabilidade de rejeitarmos a hipótese nula quando ela é correta. Neste estudo utilizaremos um α de 0,05,ou temos 5% de chance de rejeitar a hipótese nula sendo ela correta.

O z_C para o nível de significância unilateral de 5% é de -1,645. O z calculado é de – 2,59. Com z é maior do que z_C, rejeitamos a hipótese nula. Os cálculos sugerem que existe uma alteração no valor investido em DÓLAR para menos, havendo alteração na composição da carteira.

O último ponto consiste em examinar se a mediana das diferenças de rentabilidades das carteiras é igual a zero. Para tanto devemos fazer estimativas dos retornos esperados para os ativos considerados. Faremos a suposição da previsão perfeita, isto é, qualquer modelo de previsão escolhido nos daria exatamente a rentabilidade observada para o dia em análise. Multiplicando os valores da tabela 1 pelos retornos esperados obteremos as rentabilidades das carteiras.

As hipóteses consideradas são:

H_0 : não existe diferenças nas medianas das rentabilidades;
H_1 : a mediana das rentabilidades do conceito variância são menores.

O z_C para o nível de significância unilateral de 5% é de -1,645. O z calculado é de – 1,396. Com z é menor do que z_C, aceitamos a hipótese nula. Os cálculos sugerem que não existe uma alteração nas rentabilidades utilizando um ou outro conceito de risco.

5 – Conclusões.

Os resultados sugerem que a utilização do conceito de semivariância no período em análise não gera mudanças significativas nas rentabilidades das carteiras, sugerindo ser indiferente o seu uso ou não.

Embora tenhamos mudanças significativas na composição das carteiras, estas não se refletem em rentabilidade, mas apenas no risco incorrido, a menor sempre com o conceito de semivariância.

Também mostramos que as séries IBOVESPA e DÓLAR no período em análise são assimétricas com 5% de significância. A série do DÓLAR é quase normal. Isto nos leva a considerar a possibilidade de usar o conceito de semivariância no lugar da variância para que não seja violado o princípio da normalidade embutido na teoria moderna da carteira.

6 – Bibliografia.

. BRITO, Ney Roberto Ottoni de (Org.). *Gestão de Investimentos*. São Paulo: Editora Atlas, 1989.

. ELTON, Edwin, GRUBER, Martin. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

. SÀ, Geraldo Tosta de. *Administração de investimentos: Teoria de carteiras e gerenciamento do risco*. Rio de Janeiro: Editora Qualitymark, 1999.

. SANVICENTE, Antônio Zoratto, MELLAGI FILHO, Armando. *Mercado de capitais e estratégias de investimento*. São Paulo: Editora Atlas, 1988.

. SHARPE, William. *Investments*. 3. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1978.

. SIEGEL, Sidney. *Estatística Nâo-Paramétrica Para as Ciências do Comportamento*. Tradução por Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill, 1975. Tradução de: Nonparametric Statistics for the Behaviorial Sciences.

. BERNSTEIN, Peter L. *Desafio aos Deuses: A fascinante história do risco*. Tradução por Ivo Korytowski. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1997. Tradução de Against the gods.

. LEVINE, David, BERENSON, Mark, STEPHAN, David. *Statistics for managers using Microsof Excel*. Upped Saddle River: Prentice-Hall, 1999.

7 – Anexo.

Data	Ações	Dólar	Data	Ações	Dólar	Data	Ações	Dólar	Data	Ações	Dólar
29/11/00	13787	1,9610	3/1/01	16599	1,9422	6/2/01	17006	1,9980	13/3/01	15584	2,0622
30/11/00	13287	1,9596	4/1/01	16675	1,9357	7/2/01	16812	2,0045	14/3/01	15224	2,0763
1/12/00	14437	1,9795	5/1/01	16409	1,9484	8/2/01	17243	1,9959	15/3/01	15060	2,0864
4/12/00	13510	1,9847	8/1/01	16562	1,9524	9/2/01	17138	1,9884	16/3/01	15237	2,1217
5/12/00	14181	1,9648	9/1/01	16975	1,9441	12/2/01	16017	1,9813	19/3/01	14835	2,1277
6/12/00	13945	1,9657	10/1/01	16918	1,9429	13/2/01	17095	1,9803	20/3/01	14903	2,0929
7/12/00	14459	1,9698	11/1/01	17023	1,9463	14/2/01	17120	1,9894	21/3/01	14852	2,1000
8/12/00	14982	1,9695	12/1/01	16850	1,9508	15/2/01	16937	1,9812	22/3/01	14067	2,1419
11/12/00	15187	1,9648	15/1/01	16962	1,9475	16/2/01	16259	1,9940	23/3/01	14435	2,1586
12/12/00	14906	1,9676	16/1/01	16720	1,9516	19/2/01	16060	2,0027			
13/12/00	15290	1,9623	17/1/01	17191	1,9501	20/2/01	15910	2,0063			
14/12/00	15259	1,9635	18/1/01	17521	1,9527	21/2/01	15593	2,0240			
15/12/00	14987	1,9678	19/1/01	17530	1,9553	22/2/01	15910	2,0368			
18/12/00	15082	1,9539	22/1/01	17391	1,9571	23/2/01	16157	2,0436			
19/12/00	15336	1,9556	23/1/01	17832	1,9586	28/2/01	15891	2,0452			
20/12/00	14662	1,9559	24/1/01	17771	1,9595	1/3/01	16416	2,0428			
21/12/00	14505	1,9578	26/1/01	17889	1,9740	2/3/01	16581	2,0355			
22/12/00	14652	1,9524	29/1/01	17883	1,9753	5/3/01	16537	2,0232			
26/12/00	14794	1,9578	30/1/01	17722	1,9714	6/3/01	16324	2,0208			
27/12/00	15186	1,9608	31/1/01	17672	1,9711	7/3/01	16395	2,0391			
28/12/00	15259	1,9550	1/2/01	17038	1,9739	8/3/01	16226	2,0385			
2/1/01	15425	1,9384	2/2/01	16914	1,9934	9/3/01	16123	2,0599			
3/1/01	16599	1,9422	5/2/01	16731	1,9945	12/3/01	15527	2,0552			