

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DA TEORIA DA UTILIDADE MULTIATRIBUTO, E ANÁLISE COMPARATIVA COM A TEORIA DA MODELAGEM DE PREFERÊNCIAS E TEORIA DAS EXPECTATIVAS

Carlos Francisco Simões Gomes, MsC

CASNAV, Pç Barão de Ladario S/N, Ilha das Cobras, AMRJ, Edifício 8, 3º andar, Centro, Rio de Janeiro, RJ;
CEP 20091-000; Doutorando Eng. de Produção COPPE-UFRJ; Email:simoes@casnav.mar.br

RESUMO - ABSTRACT

This paper gives a spotlight at the principal characteristics and limitations of Multiple Attribute Utility Theory, and compare this Theory with Preference Modeling and Prospect Theory. These Theories allow the decision-maker to explicit his preferences. The decision-maker has to find out which Theory is more suitable for the specify problem. The problem much be discrete and finite. The decision maker may apply new Theories together in order to simplify the problem understanding, the identification of alternatives and afterwards the selection of Pareto Optima.

Pesquisa Operacional - Avaliação e Apoio à Tomada de Decisão.

Palavras chaves - Key words: Multiple Criteria Decision Aiding, Preference Modeling, Multiple Attribute Utility Theory.

1) INTRODUÇÃO

Na Teoria da Utilidade Multiatributo (**Multiple Attribute Utility Theory - MAUT**), o valor cardinal de uma alternativa **ai** é formado por um conjunto de valores (v_{1i} , v_{2i} , ... , v_{ni}) onde cada v_{ni} é o valor assumido pela alternativa **ai** em cada um dos n critérios/atributos, doravante denominado apenas atributo.

Isto significa que, caso um determinado atributo seja considerado pouco importante diante de outros atributos, ele receberá um peso (valor atribuído) inferior ao peso atribuído àqueles de maior importância. Esta Teoria permite a definição de uma função que busca agregar os valores de cada alternativa (**ai**) sujeita (classificada) em cada atributo. Isto representa que a importância relativa de cada atributo advém do conceito de “**taxa de substituição**” (*trade-off*), o decisor defronta-se com o problema de identificação da taxa de substituição de um atributo em relação ao outro.

Esta Teoria assume que:

- a) Todos os estados são comparáveis (não existe a incomparabilidade);
- b) Existe transitividade na relação de preferências;
- c) Existe transitividade nas relações de indiferença.

2) PRINCIPAIS CONCEITOS

A Teoria da Utilidade é considerada como a representação das preferências relativas de um indivíduo entre os elementos de um conjunto, usando-se números reais para representá-los. A **utilidade** é uma expressão quantitativa do valor de satisfação associado a um resultado.

Uma função de utilidade associa os possíveis níveis que uma alternativa pode assumir, com utilidades para os níveis considerados. Uma função de utilidade cardinal, possuirá informação sobre a intensidade das preferências, enquanto que uma função de utilidade ordinal limita-se a uma lista de classificação, em ordem crescente, das preferências.

A Teoria da Utilidade poderá utilizar somatórios (Σ) para quantificar os ganhos, em situações onde as alternativas possuam classificações discretas nos atributos. Na situação em que as alternativas são classificadas por restrições dentro dos atributos, pode-se utilizar integrais para quantificar os ganhos[5]. Embora possa ocorrer uma classificação por restrições dentro dos atributos, o número de alternativas e a quantidade de atributos deverão ser discretos e finitos.

Necessitando avaliar um conjunto de alternativas, em termos de seus impactos sobre n atributos, com o objetivo de escolher a melhor alternativa, os impactos são escritos por um vetor X_i , onde i varia de 1 até n. Para mensurarmos as conseqüências de cada alternativa, é criada uma função de densidade de probabilidade P, onde P será função de X_i , $\{P(X_1, X_2, \dots, X_n)\}$, e assim é escrita cada conseqüência possível. A função de utilidade U será $U(x) = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Através desta função será calculada a utilidade de cada alternativa, e a de maior utilidade será a selecionada [17]. A função de utilidade somente poderá ser utilizada em situações onde as probabilidades são conhecidas, ou a solução dos problemas é determinística e/ou as relações de preferências são conhecidas. Salienta-se que a função de satisfação não necessariamente pode ser formulada, e quando tomamos decisões não necessariamente estas serão determinísticas.

3) TEORIA DA UTILIDADE E A TEORIA DAS EXPECTATIVAS

A Teoria da Utilidade é um procedimento sistemático que permite avaliar o valor de alternativas complexas. Para tal usa uma escala comum para combinar julgamentos em mais de uma dimensão. A técnica é utilizada para:

- I) - Avaliar alternativas utilizando mais de um atributo;
- II) - Combinar medidas em um simples valor agregado de utilidade.

Para tal, utiliza o conceito de matriz de utilidade. Essa matriz apresenta os elementos de uma decisão estruturada. Esses elementos são:

- a) Alternativas;
- b) Atributos para avaliação das alternativas;
- c) Pesos que indicam a importância relativa do atributo e da avaliação da utilidade.

Atributo	Peso	Alternativa A	Alternativa B
c1	w1	Ua1	Ub1
c2	w2	Ua2	Ub2
c3	w3	Ua3	Ub3
Função de Utilidade		ΣU_a	ΣU_b

TABELA - 1

Observação: A preferência das Informações **Intracritérios** é necessária para construir preferências parciais em um critério particular, ou seja, classificação de alternativas no critério.

Entretanto, a Preferência das Informações **Intercritérios** é utilizada para definir a importância de cada critério dentro do agregado de preferências formado pelos critérios, esta informação define o peso de cada critério.

Com o intuito de avaliar várias alternativas (A, B, ...), vários atributos são então definidos (c1, c2, c3). O decisor considera cada atributo separadamente, atribuindo a sua utilidade relativa. Os pesos dos atributos são então mensurados de forma a expressar a sua importância na visão do decisor. O valor agregado para a utilidade, de cada alternativa, é obtido calculando-se a soma individual do impacto de cada alternativa sob os pesos para cada atributo. As alternativas são então comparadas com base em sua utilidade total.

Esta metodologia avalia as alternativas em função de perdas esperadas ou custos, podendo porém, ignorar as preferências do decisor quanto aos possíveis benefícios, fato que não é ignorado pela **Teoria das Expectativas**[30]. A avaliação da utilidade transforma essas preferências em uma escala quantitativa (o conceito de Escalas será abordado na sessão 5 deste trabalho), a qual pode ser combinada para determinar a utilidade agregada. Quando uma alternativa complexa tiver de ser avaliada, essa técnica exige que o decisor considere apenas um atributo de cada vez, visando a facilitar a tarefa de avaliação e aumentar a consistência do julgamento. Matematicamente podemos expressar a Teoria da Utilidade como:

W = conjunto de pesos atribuídos aos atributos onde $w_i \in W$.

Utilidade do vetor V , vetor este que pode ser dividido em elementos unidimensionais v_i , onde $v_i \in V$. A utilidade de V , ou seja $U(V)$ é definida como os somatórios de $u_i(v_i)$, ou seja: $U(V) = u(v_1, v_2, \dots, v_n) = w_1u_1(v_1) + w_2u_2(v_2) + \dots + w_nu_n(v_n) = \sum w_iu_i(v_i)$, onde i varia de 1 até n .

Neste ponto encontramos a crítica advinda dos estudos da **Teoria das Expectativas**[30]. Suponhamos duas situações:

Situação A: temos 90% de probabilidade de ganharmos R\$ 1000,00 e 10% de probabilidade de nada ganharmos, a utilidade será 0,9 vezes 1000 + 0,1 vezes 0, **que é igual a 900**.

Situação B: temos 50% de probabilidade de ganharmos R\$ 2000,00 e 50% de probabilidade de nada ganharmos, a utilidade é 0,5 vezes 2000 e 0,5 vezes 0, **que é igual a 1000**.

Como existem pessoas que irão preferir a situação A, onde tem mais chances de ganhar R\$ 1000, do que a situação B que tem menos chances de ganhar R \$ 2000,00, estas pessoas irão contradizer a Teoria da Utilidade.

4) TEORIA DA UTILIDADE E O APOIO MULTICRITÉRIO À DECISÃO (AMD)

Nem todo critério qualitativo pode ser facilmente avaliado quantitativamente, por exemplo, aceitabilidade política[4][7][11][13]. Esse tipo de técnica não pode ser utilizada para preferências que mudam com o tempo. Essas duas limitações, associadas à dificuldade de se levar em consideração as preferências individuais do decisor, poderão acarretar a necessidade de se buscar outras metodologias do AMD[12][19][24][27], que se mostrem superiores.

A Modelagem de Preferências[12],[19] a [26], busca considerar as preferências subjetivas existentes em um processo de decisão, bem como a avaliação subjetiva necessária em critérios qualitativos.

4.1 Fontes necessárias:

I - Nível de esforços - os analistas e decisores devem trabalhar juntos para identificar alternativas e atributos para avaliação, para posteriormente expressar a preferência em forma de função de utilidade. O resultado é obtido através de um esforço conjugado.

II - Nível de proficiência - os atores da decisão devem ter uma comunicação efetiva, para poderem obter um resultado eficaz. O analista deve ser capaz de avaliar o grau de relacionamento de cada alternativa em função de um dado critério, quando trabalhar com elementos subjetivos.

4.2 Descrição das ferramentas:

Os atributos sob os quais as alternativas serão julgadas devem ser especificados. Podem ser originados de uma análise de objetivo ou de uma situação. As alternativas devem ser bem definidas para permitir ao decisor avaliar até que grau elas atingem o máximo de um dado atributo.

4.3 Assunções Importantes:

a) A utilidade é uma medida de satisfação, tendo a propriedade aditiva. A avaliação da utilidade para mais de um atributo, pode ser adicionada de forma a se obter a preferência baseada em um julgamento multidimensional.

b) Os atributos aplicados à decisão tem dimensões fixas para permitir a avaliação do quanto cada alternativa possui de determinado atributo. A dimensão para avaliação não varia de alternativa para alternativa na decisão, apesar do nível de atributos para cada alternativa variar. As preferências subjetivas são consistentemente aplicadas para cada alternativa.

c) Para cada par de elementos comparados, tem-se sempre bem definida uma ordem de preferência[17]. Considerando duas alternativas a_1 e a_2 , pode ocorrer:

$a_1 > a_2$, se a_1 é preferida a a_2	$a_1 \sim a_2$, se a_1 é indiferente a a_2	$a_1 < a_2$, se a_2 é preferida a a_1
--	---	--

A preferência deve ser transitiva, ou seja:

Se $a_1 > a_2$ e $a_2 > a_3$, logo $a_1 > a_3$	Se $a_1 = a_2$ e $a_2 = a_3$, logo $a_1 = a_3$
---	---

d) Continuidade: admite-se que é possível estabelecer a probabilidade de risco de duas alternativas, uma vez que comparamos com uma alternativa determinística[17].

e) Substituição: o decisor tenta substituir alternativas probabilísticas por alternativas determinísticas. A certeza é considerada melhor que a incerteza, mesmo que a incerteza possa acarretar ganhos superiores[17], e as alternativas têm crescimento monotômico[5]: $V(a_1, a_2) = Va_1(a_1) + Va_2(a_2)$.

5) ESCALAS

Uma avaliação em uma escala tem como propósito fazer a graduação de um fator, desde que essa Escala permita exibir uma propriedade específica, seja um julgamento absoluto ou relativo. As escalas de avaliação são baseadas em Teorias psico-físicas, utilizando-se de conceitos sociológicos, psicológicos e Teoria da Decisão. A escala de avaliação é usada para quantificar atributos, ou quaisquer fatores, que possam ser ordenados de forma subjetiva (qualitativa) ou quantitativa. Uma vez escalonado o julgamento, uma medida quantitativa pode (ou deve) ser incorporada na análise. Para esse fim são utilizadas várias unidades de medida, bem como meios não numéricos, ou números adimensionais[15].

Ao se utilizar números em escalas, estes deverão respeitar as seguintes propriedades:

Ordem - indicam prioridade, o menor número vem antes do maior número em uma visão crescente, e inversamente em uma visão decrescente; **Unidade** - a diferença entre o número 3 e 2 ($3 - 2$) é igual à diferença entre 9 e 8 ($9 - 8$) e, **Cardinalidade** - representa a quantidade.

As escalas utilizadas poderão ser[29]:

(a) Verbal (ou nominal): neste tipo de escala atribuímos nomes ou números para as opções; poderemos apenas obter o resultado, “estas opções são iguais” ou “estas opções são diferentes”; matematicamente, teríamos que, se x é igual a y , e se y é igual a z , z é igual a x ; qualquer elemento diferente de x será diferente dos demais. Esta escala irá basear-se apenas numa comparação binária: é igual ou é diferente. Esta escala caracteriza diferentes fatores (ou critérios) quente/frio; branco/cinza/preto; os nomes são associados a fatores observados. Esta é uma escala adequada para seleções mutuamente exclusivas.

(b) Cardinal: esta escala permite definir apenas a quantidade de posições possíveis dentro de uma escala. O fato de definirmos as posições como 0, 2 e 4 (três posições) seria indiferente se os números fossem substituídos por 1, 2 e 3 (três posições). A cardinalidade está associado a quantidade.

(c) Ordinal: esta escala está associada ao conceito de posição em uma ordem pré definida de importância, ou seja, é definido um conjunto de posições possíveis de serem ocupadas por um objeto, por exemplo: posição 1, posição 2, ... , posição n , onde no caso de crescente em importância a posição n é mais importante que a posição 1, e em caso oposto, a posição 1 é preferida à posição n . Essa escala é usada para ordenar de forma sequencial (ou seja de preferência) objetos similares. A ordenação é feita de forma gradativa, mais não ocorre diferenciação de fatores, ou seja, a ordenação é feita dentro de um critério, como por exemplo: pouco quente, quente, muito quente. A escala ordinal com origem natural estabelece uma origem comum (zero)[15].

(d) Intervalo (escala de transformações lineares, ou simplesmente escala linear, sendo $y = ax + b$, onde $a > 0$): a escala de intervalos tenta atribuir números que representem a “distância psicológica” que o decisor vê, as opções de um critério e/ou preferências entre alternativas. Esta escala não reflete apenas a posição de um objeto sobre o outro, mas a graduação em que um objeto ou alternativa supera o outro(a). A diferença entre os fatores é estabelecida através do comprimento do intervalo que as separa. Nesta escala, o ponto zero é arbitrário, não sendo a origem da escala, como por exemplo, a escala de temperatura em °C. A escala diferencial, $y = x + b$, é um caso particular da escala de intervalo.

(e) Quociente (ou escala de razões onde $y = ax$, e $a > 0$): a escala de razão tem seu maior exemplo nas escalas métricas, pois um objeto de tamanho três pés terá o triplo do tamanho de outro objeto de tamanho de um pé, não importando a escala métrica usada; uma escala de temperatura não segue essa regra, visto que 100°C é o dobro de 50°C , porém em graus Kelvin, 373°K não é o dobro de 323°K . Esta escala precisa ter uma origem natural, por exemplo, não existem tamanhos de objetos com valor negativo, logo 0m ou 0 em qualquer escala métrica é uma origem natural. O zero representa a ausência de propriedade.

(f) Multidimensional: associação de dois ou mais dos conceitos(escalas) anteriores em um espaço n -dimensional. Para representação do espaço multidimensional pode-se utilizar matrizes.

6) TEORIA DA MODELAGEM DE PREFERÊNCIAS

As referências [2][7][10][12][20] a [26] apresentam uma descrição desta Teoria. Segue-se um resumo da mesma para permitir sua visualização e posterior comparação desta Teoria com a Teoria da Utilidade Multiatributo.

Considerando \underline{a} e \underline{b} duas alternativas, e j o atributo de comparação, temos:

aP_jb \underline{a} é preferido sem hesitação do que \underline{b} .

aI_jb \underline{a} e \underline{b} são indiferentes.

aQ_jb existe uma hesitação na comparação das alternativas, há dúvida se ocorre aP_jb ou aI_jb .

aR_jb é impossível comparar \underline{a} e \underline{b} (esta relação surge da necessidade de modelar o desconhecido, e/ou situações de atributos conflitantes).

aS_b é a união de aP_jb com aQ_jb e aI_jb .

$\underline{a} > \underline{b}$ significa aP_jb ou aQ_jb .

$\underline{a} \sim \underline{b}$ significa aI_jb ou aR_jb .

$g(a)$ é chamado de performance de \underline{a} ; se, $g(a) = g(b)$, \underline{a} é indiferente a \underline{b} .

7) COMPARAÇÃO DA TEORIA DA MODELAGEM DE PREFERÊNCIAS COM A TEORIA DA UTILIDADE MULTIATRIBUTO

MODELAGEM DE PREFERÊNCIAS	TEORIA DA UTILIDADE MULTIATRIBUTO
Permite ordenar (pelo menos parcialmente) as alternativas em termos relativos, mesmo quando a informação de que se dispõe sobre as preferências critério a critério é pobre; no entanto, não é possível a indicação do mérito global de cada alternativa [4].	Possibilita definir uma medida de mérito (valor) global para cada alternativa, indicadora da sua posição relativa numa ordenação final; no entanto, é necessário dispor de informação completa (cardinal) sobre as preferências intracritério dos decisores, o que na maioria dos casos práticos é muito difícil ou mesmo impossível de obter [4].
Permite quatro diferentes formas de comparação entre alternativas: preferência sem hesitação; preferência com hesitação; indiferença e incomparabilidade[20] a [25].	Permite duas formas de comparação: preferência e indiferença. Não pressupõe a existência de hesitação[16].
A hesitação é uma área fértil para aplicação de Teorias que trabalham com o não determinístico: Teoria dos Conjuntos Nebulosos e Teoria dos Conjuntos Aproximativos (TCA) [6][9][10] [28].	Existem trabalhos que aplicam as Teorias dos Conjuntos Nebulosos e TCA para verificar a sensibilidade dos resultados [3][8][14][18].
Não necessita da criação de uma função de utilidade, utilizando-se de comparações paritárias e gráficos de Kernel para representar a dominância das alternativas[12].	Pressupõe a criação de uma função de utilidade[5].
Não pressupõe transitividade	Pressupõe transitividade.
Pressupõe subordinação e análise paritária[13] a [25].	Facilita o estabelecimento de hierarquias [1][3][16] [27].

TABELA - 2

8) CONCLUSÃO

As Teorias da Modelagem de Preferência, Teoria Multiatributo e Teoria das Expectativas permitem ao decisor explicitar as suas preferências. O decisor/analista identificará qual destas Teorias melhor se aplica ao problema em estudo, necessariamente com alternativas e atributos discretos e finitos. Caberá ao decisor/analista utilizar-se de outras diferentes Teorias[6][8] a [11][13][14][18][19][28], quando julgar necessário, de forma associada, buscando sempre uma melhor compreensão do problema, explicitação das preferências, aversão ao risco, e classificação das alternativas e posterior escolha do resultado Ótimo de Pareto. A Teoria da Expectativa nos faz lembrar que uma decisão não é só baseada no que se pode ganhar, mas também com que probabilidade e/ou possibilidade podemos ganhar; deve-se considerar, de forma conjunta as possibilidades e probabilidades do que se pode perder, associada a quantificação da perda, e as probabilidades e/ou possibilidades de ganho associada a quantificação do que se pode ganhar. A característica do decisor, mais ou menos avesso a risco é determinante no processo de decisão, e deve ser bem modelada. A Modelagem de Preferências nos lembra que existem situações/problemas/alternativas que não são transitivas(os) e alternativas que são incomparáveis.

9) BIBLIOGRAFIA

- [1]BELTON, Valerie. (1986). *A Comparison of the Analytic Hierarchy Process and Simple Multi-Attribute Value Function*; European Journal of Operational Research; núm.: 26; páginas 7 a 12.
- [2]BOUYSSOU, Denis. (1996). *Outranking Relations: Do They Have Special Properties?*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 5, page 99-111.
- [3]BUCKLEY, J. J. (1985). *Fuzzy Hierarchical Analysis*; Fuzzy Sets and Systems; volume 17; Number 3; page 233-247; North-Holland.
- [4]COSTA, Carlos Antonio Bana & Manuel Campos de Almeida. (1990). *MENSOR - Método Multicritério para Segmentação Ordenada*; Revista Investigação Operacional; número 1; volume 10; páginas 19 a 28.
- [5]FRENCH, Simon. (1988). *An Introduction the Mathematics of Rationality*; Ellis Horwood Limited.
- [6]GOMES, Carlos Francisco Simões & Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes. (1995). *ALINA - A Fuzzy Rough Multicriteria Model for War Ship Logistics Decision Aiding*; Sixth International Fuzzy Systems Association World Congress, IFSA 95, São Paulo, Brasil.
- [7]GOMES, Carlos Francisco Simões & Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes. (1995). *Uma Análise Multicritério de um Problema de Engenharia de Produção Naval*, XV - ENEGEP, São Carlos, SP, Brasil.
- [8]GOMES, Carlos Francisco Simões & Antonio Roberto Mury. (1996). *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Aproximativos (TCA) na redução de critérios de Análise Hierárquica (AHP) em processo de avaliação de pessoal*, XVI ENEGEP, Piracicaba, SP.
- [9]GOMES, Carlos Francisco Simões & Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes. (1995). *Logistic Analysis for War Ships Through a Fuzzy Rough Multicriteria Model*, International Conference on Industrial Logistics, ICIL 95, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil .
- [10]GOMES, Carlos Francisco Simões & Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes. (1996). *Application the Fuzzy-Rough Multicriteria Decision Methodology ALINA in an Industrial Production Process, Executing a Logistic Prioritization of the Furnishes alternatives*, IPMU 96, Granada, Espanha.

- [11]GOMES, Carlos Francisco Simões. (1996). *Concepção de uma Metodologia para Quantificação da Indiscernibilidade e Nebulosidade Existentes nos Critérios e Alternativas Presentes em um Processo Multicritério de Decisão*, VIII CLAIO e XXVIII SBPO, RJ, Brasil.
- [12]GOMES, Carlos Francisco Simões & Maria Angelica Lombreras Rocha. (1997), *Aplicação da Modelagem de Preferências no Apoio multicritério à Decisão*. ENEGEP 97, Gramado – RS, Brasil.
- [13]GOMES, Luiz Flavio Autran Monteiro & Carlos Francisco Simões Gomes. (1996). *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Aproximativos à Modelagem Analítica de Apoio à Negociação* VIII CLAIO e XXVIII SBPO, Rio de Janeiro, Brasil.
- [14]GOMES, Luiz Flavio Autran Monteiro & Antonio Roberto Mury & Carlos Francisco Simões Gomes. (1997). *Multicriteria Ranking with Ordinal Data*. SAMS, Vol. 27, pp. 139-145.
- [15]HAIMES, Yacov Y. & Vira Chankong. (1991). *Multiobjective Decision Making: Theory and Methods*; Series Volume 8; North Holland and Series in System Science and Engineering.
- [16]LOOTSMA, Freek. A. (1990). *The French and America School in Multicriteria Decision Analysis*, Recherché Opérationnelle; Operations Research; vol. 24; núm. 3; páginas 263 a 285.
- [17]MARSHALL, Kneale T. & Robert M. Oliver. (1995). *Decision Making and Forecasting*; McGraw Hill; Inc.
- [18]MURY, Antonio R. & Luiz F. Autran M. Gomes. (1995). *Conjuntos Nebulosos e o Processo de Tomada de Decisão*; XXVII SBPO; Vitória; ES; Brasil.
- [19]ROUBENS, Marc. (1995). *Fuzzy sets in Preference Modeling and Decision Analysis*; Sixth International Fuzzy Systems Association World Congress; IFSA 95; São Paulo; SP.
- [20]ROY, Bernard. (1985). *Methodologie Multicrièrè d'Aide à la Décision*. Paris, Editora Econômica.
- [21]ROY, Bernard. (1988). *The Outranking Approach and The Foundation of ELECTRE Methods*; Paper presented at the Third International Summer School “Multiple Criteria Decision Aid: Methods; Applications and Software”; Monte Estoril; Portugal.
- [22]ROY, Bernard. (1989). *The Outranking Approach and the Formulations of ELECTRE Methods*. Paris: LAMSADE - Université Paris-Dauphine.
- [23]ROY, Bernard & Denis Bouyssson. (1993). *Aide à la décision fondée sur une PAMC de type ELECTRE*; páginas 270, 271 e 414 a 433; Editora Econômica.
- [24]ROY, Bernard & Denis Bouyssson. (1993). *Aide Multiple a la Decision: Methods et cas (in English “Multiple Criteria Decision Aid: Methods and Case Studies)*; Editora Econômica.
- [25]ROY, Bernard & Daniel Vanderpooten. (1995). *The European School of MCDA: A Historical Review*. Paris: LAMSADE - Université Paris-Dauphine, EURO XIVth Conference.
- [26]ROY, Bernard & Daniel Vanderpooten. (1996), *The European School of MCDA: Emergence, Basic Features and Current Works*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 5, páginas 22 a 38.
- [27]SAATY, Thomas L. (1991). *Método de Análise Hierárquica*; McGraw HILL.
- [28]SLOWINSKI, Roman & Piotr Czyzak. (1994). *A Concordance-Discordance Approach to Multi-Criteria Ranking of Action with Fuzzy Evaluation*; XIth International Conference on Multiple Criteria Decision-Making; Coimbra.
- [29]TORGERSON, Warren S. (1985). *Theory and Methods of Scaling* John Wiley and Sons.
- [30]TVERSKY, Admos & Daniel Kaneman(1979), *Prospect Theory: an Analysis of Decision Under Risk*, Econometrica, Volume 47, number 2, page 263 a 291.