DIVERSIFICAÇÃO DE UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Paulo Henrique Adib Dantas Salim (UFS)
ph_ufs@hotmail.com
Elisalvo Alves Ribeiro (UFS)
elisalvo.ribeiro@gmail.com
Celso Satoshi Sakuraba (UFS)
sakuraba@ufs.br
TACITO AUGUSTO FARIAS (UFS)
tacitoaugusto@yahoo.com.br

A Teoria do Portfólio, também conhecida por Teoria das Carteiras, procura descrever a forma como investidores racionais selecionam ativos para compor sua carteira de investimentos, balanceando as noções de risco incorrido e retornos esperaddos. Apesar de o uso de modelos quantitativos e métodos computacionais baseados em programação matemática ter se tornando uma prática cada vez mais comum na orientação à seleção de ativos no mercado financeiro, detectou-se uma grande carência de pesquisas no país que utilizem tais modelos. O problema norteador da presente pesquisa envolve a análise um determinado conjunto de ativos e seus parâmetros, tais como retornos esperados, riscos individuais, covariâncias e cotas de cada ação investida, para a seleção de uma carteira ótima que maximize o retorno para um dado limite de exposição ao risco. O objetivo deste artigo é discutir como a programação matemática não-linear pode orientar escolhas no mercado financeiro. Para tanto, é necessário entender como é formada a fronteira eficiente entre risco e retorno, e propor bases para a aplicação de modelos em sistemas computacionais.

Palavras-chave: Teoria do portfólio, programação não-linear

1. Introdução

A Teoria do Portfólio, também conhecida por Teoria das Carteiras, procura descrever a forma como investidores racionais selecionam ativos para compor sua carteira de investimentos, balanceando as noções' de risco incorrido e retornos esperados. A pesquisa acerca dessa teoria é bastante comum no Brasil dentro da área de Finanças, na qual grande parte dos estudos se preocupa em discutir o desvio padrão total dos valores de retornos esperado dos ativos de uma carteira para determinar uma fronteira eficiente, i.e., um conjunto de pontos que representa escolhas ótimas dados os parâmetros de um conjunto de ativos.

Detectou-se uma grande carência de pesquisas no país que utilizem modelos matemáticos, especialmente de programação não-linear. O uso de modelos quantitativos e métodos computacionais baseados em programação matemática vem se tornando uma prática cada vez mais comum na orientação à seleção de ativos no mercado financeiro. Modelos de programação não-linear podem ser usados para determinar uma carteira que minimize o risco associado aos seus investimentos ao mesmo tempo em que maximiza o retorno esperado (ganho), fornecendo um equilíbrio inteligente entre esses dois fatores (ASSAF NETO e LIMA, 2009). Dadas as suas limitações relacionadas às hipóteses a serem assumidas em determinadas situações, a solução de tais modelos permite obter a melhor solução dentre a quantidade de combinações possíveis, que pode ser infinita.

O problema norteador da presente pesquisa envolve a análise um determinado conjunto de ativos e seus parâmetros, tais como retornos esperados, riscos individuais, covariâncias e cotas de cada ação investida, para a seleção de uma carteira ótima que maximize o retorno para um dado limite de exposição ao risco. O objetivo deste artigo é discutir como a programação matemática não-linear pode orientar escolhas no mercado financeiro. Para tanto, é necessário entender como é formada a fronteira eficiente entre risco e retorno, e propor bases para a aplicação de modelos em sistemas computacionais.

2. Revisão Bibliográfica

A presente seção apresenta os conceitos básicos para sobre Teoria do Portfólio e Programação Matemática, essenciais para o entendimento deste trabalho.

2.1. A Teoria do Portfólio

A Teoria do Portfólio se baseia no método dedutivo, proposto pelos racionalistas Descartes, Spinoza e Leibniz, o qual pressupõe que apenas a razão é capaz de levar ao conhecimento verdadeiro. O raciocínio dedutivo tem o objetivo de explicar o conteúdo das premissas através de uma análise do geral para o particular, e chegar a uma conclusão por intermédio de uma cadeia de raciocínio em ordem decrescente (GIL, 1999 apud SILVA e MENEZES, 2001).

A premissa inicial é a de que os recursos são escassos e as decisões devem ser otimizadas, minimizando ou maximizando objetivos globais. A existência de diversas opções de investimento com diferentes riscos, retornos e correlações faz com que gestores e analistas usem as relações entre tais parâmetros em sua tomada de decisão, otimizando a utilidade dos seus recursos.

O grande marco teórico do gerenciamento de diversos ativos (portfólio), ocorreu com Harry Markowitz (1952) em seu artigo "*Portfolio Selection*", onde é evidenciada a relação entre dois fatores para o investidor: risco e retornos esperados. Influenciado pelos estudos sobre incerteza de Neumann, Friedman, Savage e Willian, ele verificou que as decisões de seleção de ativos não deveriam estar baseadas apenas nos retornos esperados, mas também nos riscos envolvidos tanto individualmente quanto em conjunto, baseado nas correlações entre os ativos (DAMODARAN, 1996). Tais riscos são associados à volatilidade dos valores das ações, representadas muitas vezes por medidas tais quais seu desvio padrão.

Segundo Damodaran (1996), a crença de que a diversificação era benéfica aos investidores já existia bem antes de Markowitz. A revista britânica *Financial Review of Reviews* de 1909 usou correlações entre títulos para defender o argumento de que os investidores deveriam dividir suas apostas e que uma carteira diversificada ofereceria menos riscos do que o investimento em um único título, sem implicar em retornos diferentes. Contundo, Markowitz alterou a maneira como pensamos sobre riscos ao se vincular a variabilidade presente de uma carteira de investimentos aos co-movimentos entre os ativos individuais naquela carteira.

Uma das maiores contribuições dos estudos de Markowitz foi ressaltar a importância da diversificação, conceito contestado por importantes acadêmicos. O conceito da diversificação deriva da observação que os preços dos ativos financeiros não se movem de modo exatamente conjunto, i.e., eles possuem uma correlação imperfeita. Nesta condição, a variância total de uma carteira será reduzida pelo fato que a variação no preço individual de um ativo é compensada por variações complementares nos preços dos demais. Tais constatações podem ser verificadas matematicamente pela equação da variância total da carteira:

$$\text{Var(portfólio)}=\sigma p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j \qquad (1)$$

Os retornos dos ativos são definidos em um espaço probabilístico, sendo e a medida comum da relação de variação entre duas variáveis chamada de covariância. Segundo Montgomery e Runger (2012), a covariância é uma medida de relação linear entre as variáveis aleatórias, dada pela Equação (2).

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = E(XY) - \mu_x\mu_y \qquad (2)$$

Sendo a correlação entre dois ativos ρ_{ij} igual à covariância σ_{ij} dividida pelo desvio padrão de cada elemento σ_i e σ_j, podemos rescrever a Equação (1) da seguinte forma:

$$\text{Var(portfólio)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \qquad (3)$$

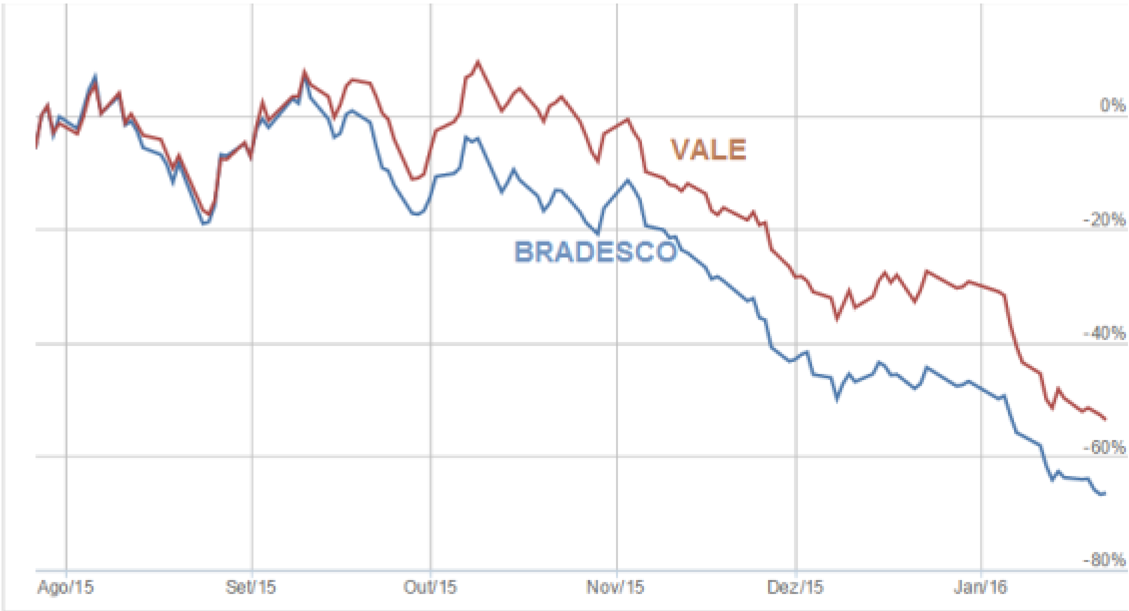
Usando da teoria do portfólio de Markowitz, Assaf, Neto e Lima (2009) reintegram que o risco atribuído a um ativo é diferente quando ele está ou não em uma carteira. Desta forma, o risco de uma carteira não é a simples somatória do risco de cada ativo individualmente, mas depende também da covariância entre estes ativos. É bastante comum na composição de uma carteira existir ações com baixos retornos, mas com bons efeitos no risco total da carteira.

Considerando que não há desvio padrão, nem x_i negativos, pois não se está considerando a possibilidade de vendas a descoberto, é fácil observar que o segundo termo da equação fica negativo quando a correlação é negativa, diminuindo o valor total do risco da carteira.

As figuras a seguir mostram na prática como funcionam as correlações e covariâncias de mercado. Inicialmente podemos comparar ações da empresa Bradesco Participações (BRAP4.SA) e da mineradora Vale (VALE5.SA). As Figura e 2 mostram as variações nos valores dessas duas ações em um período de seis meses e dez anos, respectivamente. Podemos concluir que estes dois ativos são altamente correlacionados $(\rho ij \approx 1)$. Desta forma, em uma carteira com apenas esses dois ativos não haverá o efeito positivo da diversificação.

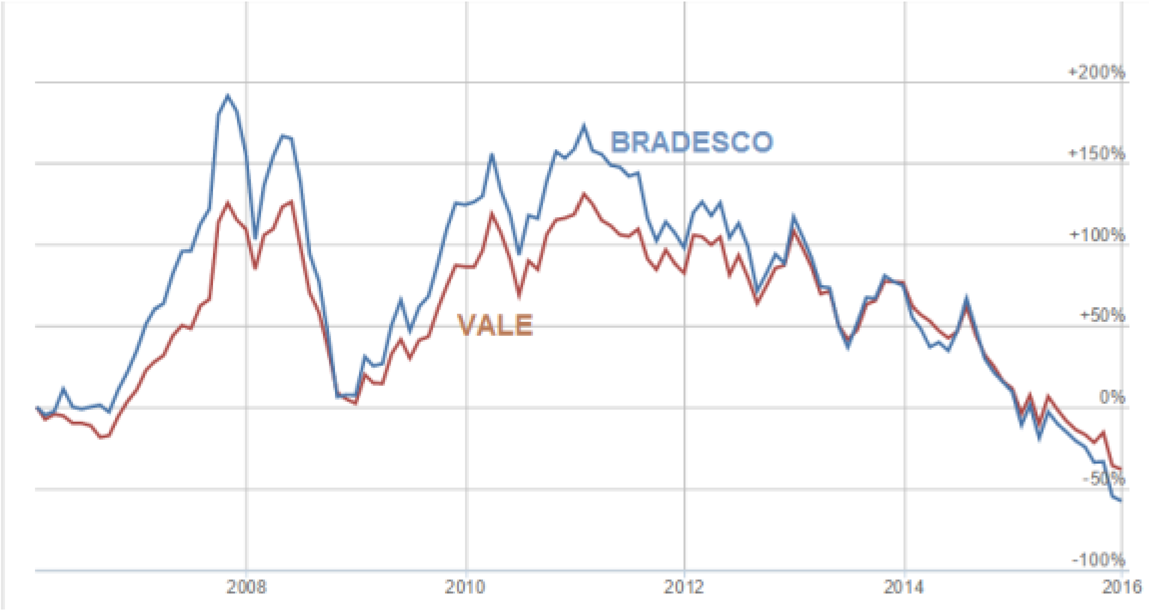
Por outro lado, se analisarmos as ações da Embraer (EMBR3) em comparação com as ações da Vale e do Bradesco Participações nos mesmos períodos de tempo, demonstrados nas Figura e 4, podemos verificar que existe um movimento contrário. Em alguns momentos, quando há valorização dos ativos da Vale e do Bradesco, ocorre a desvalorização dos ativos da Embraer; e há momentos nos quais há a valorização da Embraer, nos quais ocorre grande volatilidade no valor dos outros dois ativos. Com isso, podemos chegar à conclusão que a correlação entre Embraer e Vale ou entre Embraer e Bradesco é negativa. No entanto, esta correlação não é perfeitamente negativa, pois há alguns poucos momentos em que os três ativos se valorizam juntos $(1 < \rho ij < 0)$.

Figura 1 – Variações de BRAP4.SA e VALE5.Sa em um período de 6 meses



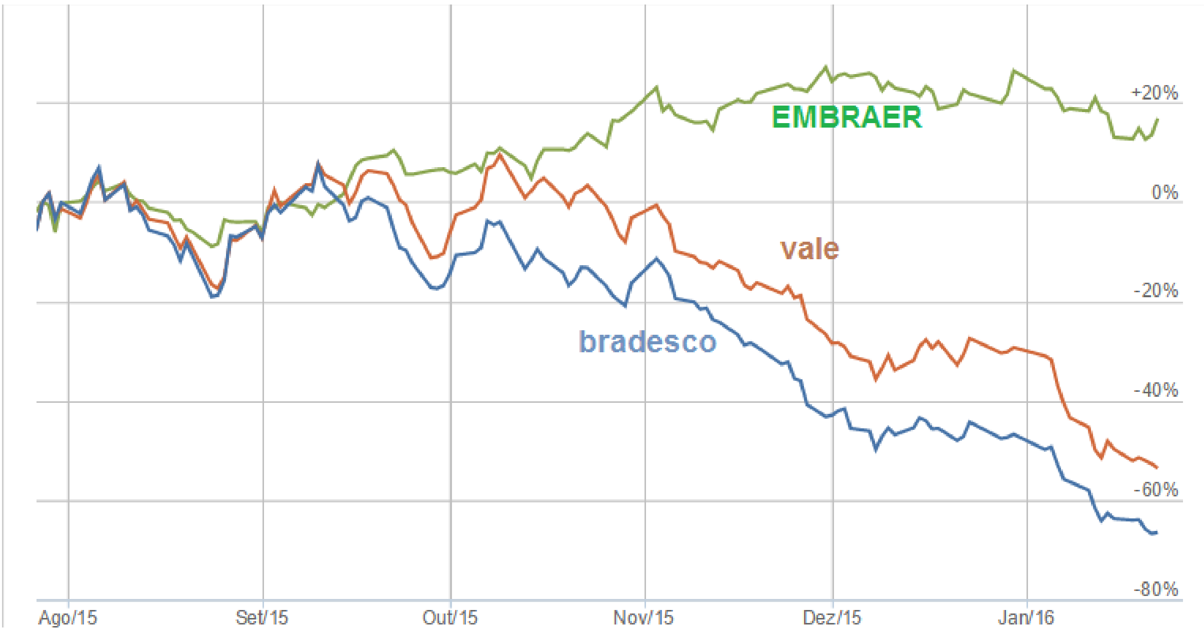
Fonte: http://exame.abril.com.br/mercados/cotacoes-bovespa/acoes

Figura 2 – Variações de BRAP4.SA e VALE5.Sa em um período de 10 anos



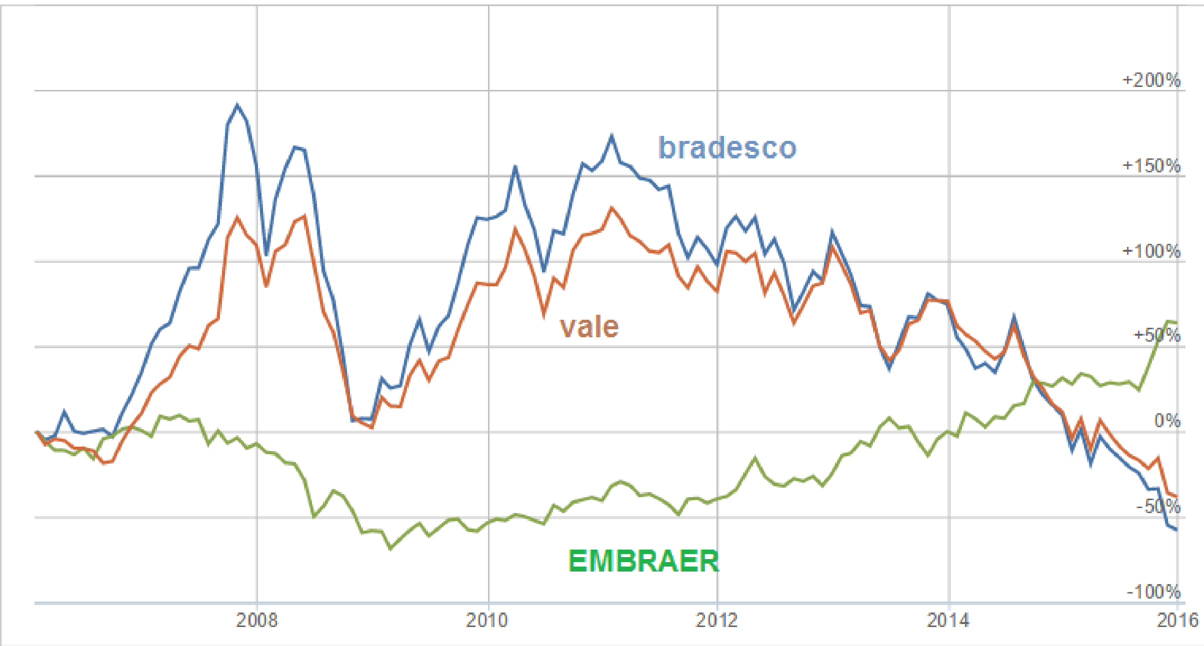
Fonte: http://exame.abril.com.br/mercados/cotacoes-bovespa/acoes

Figura 3 – Variações de BRAP4.SA, VALE5.SA e EMBR3.SA em um período de 6 meses



Fonte: http://exame.abril.com.br/mercados/cotacoes-bovespa/acoes

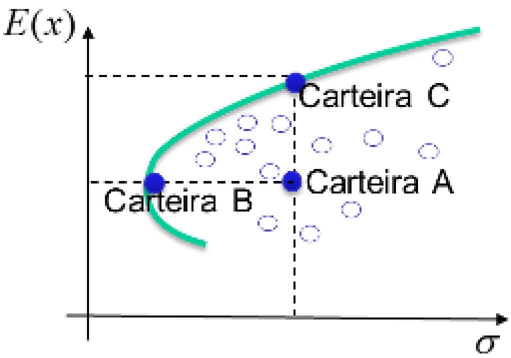
Figura 4 – Variações de BRAP4.SA, VALE5.SA e EMBR3.SA em um período de 10 anos



Fonte: http://exame.abril.com.br/mercados/cotacoes-bovespa/acoes

Um dos conceitos mais importantes que derivam da Teoria do Portfólio é a Fronteira Eficiente. Na Figura pode-se observar que uma carteira como a formada pelo ponto A não seria conveniente, pois a carteira B – para o mesmo retorno – tem menor risco, e a carteira C – para o mesmo risco – tem maior retorno.

Figura 5 – Fronteira Eficiente



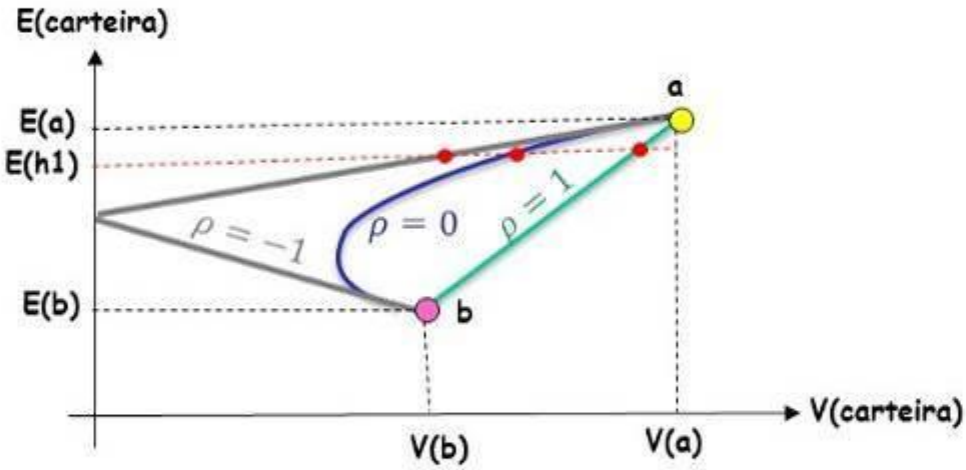
Fonte: Adaptado de Markovitz (1959)

A curva que contém as melhores combinações em termos de risco e retorno, ou seja, os portfólios de maior retorno para um dado nível de risco, é chamada de Fronteira Eficiente. De acordo com Markowitz (1970), se um portfólio é eficiente, é impossível obter um retorno maior sem incorrer em maior desvio padrão (e portanto, maior risco), assim como é impossível obter menor desvio padrão sem diminuir o retorno médio. Depois de eliminados todos os “portfólios dominados”, como aquele representado pela Carteira A na Figura 6, tem-se o portfólio eficiente.

A Figura 6 mostra o delineamento da fronteira eficiente quando há dois ativos. O eixo das ordenadas representa o retorno médio esperado (média ponderada entre o retorno do ativo e sua participação na carteira), enquanto o eixo das abscissas é a variância das carteiras (descrita a pelas Equações 1 e 2). Cada curva representa a fronteira eficiente para um valor diferente de covariância entre as carteiras *a* e *b*. É interessante verificar que quanto menor o grau de correlação, mais encurvada é a fronteira eficiente, i.e., o efeito diversificação torna-se mais intenso quanto menor o coeficiente de correlação ρ. A curvatura mais acentuada ocorre quando $\rho = -1$, i.e., quando há correlação negativa perfeita entre os dois ativos. Por simetria, a curvatura menos acentuada é quando $\rho = 1$. Os casos extremos (1 e -1) são de pouca importância prática, uma vez que no mundo real a maioria dos ativos possui correlação positiva entre si.

As correlações explicam como ativos podem gerar sinergia e reduzir o risco da carteira. Observando a Figura 6, se um gestor de investimento busca um retorno esperado $E(h1)$ e possui à sua disposição apenas dois ativos, seu risco (variância) irá depender de como esses ativos se correlacionam. Considerando uma correlação negativa para o exemplo hipotético acima, é possível verificar que há um combinação de *a* e *b* que gere um retorno esperado $E(h1)$ com um risco muito próximo do risco de *b*.

Figura 6 – Efeito da correlação no portfolio



Fonte: Adaptado de Markovitz (1959)

2.2. Programação Matemática

A pesquisa operacional é a aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, tais como projetar, planejar e operar sistemas que requerem alocações eficientes de recursos escassos. Alguns autores separam os modelos de pesquisa operacional em modelos de programação matemática (determinística) e modelos estocásticos (HILLIER e LIEBERMAN, 2006)

Dentro da denominada ciência e tecnologia da gestão, a programação matemática envolve a observação e análise de um sistema real e a construção de um modelo científico para a obtenção de uma solução otimizada. Este modelo abstrato deve ser detalhado para captar elementos essenciais e representar o sistema real em situações de causa e efeito, ao mesmo tempo em que deve ser simples o suficiente para sua solução e síntese de resultados.

Hillier e Lieberman (2006) postulam que os modelos de programação matemática têm um papel destacado na pesquisa operacional. Para um dado problema, um modelo de programação matemática representa alternativas ou escolhas desse problema como variáveis de decisão, e procura valores dessas variáveis que otimizem uma função objetivo (em geral a maximização de um lucro ou minimização de um custo), sujeito a restrições sobre os possíveis valores das variáveis. A forma geral de um modelo de programação matemática é:

Maximizar / minimizar $f\,(x_1, x_2,...,x_n)$

Sujeito a $g\,(x_1, x_2,...,x_n) \geq$ ou $\leq b$

Exemplos de modelos de programação matemática são os de programação linear, em que todas as funções do problema (como f e g acima) são lineares em relação às variáveis x_1, $x_2,...,x_n$, que podem assumir valores contínuos. Nos modelos de programação discreta (otimização binária ou inteira), as funções são lineares em relação às variáveis, mas estas só podem assumir valores inteiros. Os problemas de programação não-linear são caracterizados pela não-linearidade da função objetivo e/ou das restrições.

De acordo com Hillier e Lieberman (2006), os problemas práticos de otimização frequentemente requerem a modelagem de relações não-lineares. Em alguns casos é possível reformular estas relações de forma que elas se tornem lineares, mas caso isso não aconteça é necessário a utilização de uma formulação de programação não-linear.

Em problemas financeiros envolvendo Teoria do Portfólio, é comum o uso da programação quadrática e da metodologia de programação (não-linear) paramétrica. Diferentemente da programação linear para qual existe o método simplex, não existe nenhum algoritmo de proposito genérico com a mesma eficiência que possa ser usado para resolver problemas de programação não-linear de grandes dimensões. Contudo, os constantes avanços computacionais vêm facilitando a solução de tais problemas, deixando para os pesquisadores um maior foco na modelagem e na análise dos resultados, conforme acontece, por exemplo, nas aplicações da programação não-linear na Teoria dos Portfólios (HILLIER e LIEBERMAN, 2006).

3. Aplicação da Programação Matemática Não-Linear na Teoria da Carteira

Um modelo de programação não-linear pode ser formulado para o problema de determinação de um portfólio. Toda modelagem começa com a definição do problema real, no caso: a maximização do retorno esperado de uma carteira, constituída de ativos dentre uma quantidade *n* de possíveis opções, de forma a não ultrapassar um valor de risco pré-determinado. O risco é associado às variações nos valores dos ativos pertencentes à esta carteira.

Supondo um mercado de capitais com *n* ações passíveis de inclusão na carteira, o gestor de investimento tem como variáveis de decisão as cotas alocadas em cada ativo x_i (i = 1,2,3,...,*n*). Estipulando que μ_i e σ_i sejam, respectivamente, o retorno esperado e o risco (desvio padrão dos valores) de um determinado ativo *i*, estes dados tornam-se parâmetros para o modelo. Adota-se a premissa que estes valores podem ser mensurados por uma análise adequada. Outro parâmetro de grande importância no modelo é a covariância entre os ativos i e j, representado neste modelo como σ_{ij}, para $j = 1,2,3,...,n$ ($j \neq i$) (HILLIER e LIEBERMAN, 2006).

Um modelo inicial do portfólio é estruturado tendo como função objetivo a maximização do lucro, que é o resultado dos valores esperados dos ativos. Assim, para um conjunto ativos selecionados $(x_1, x_2, ..., x_n)$ teremos uma variância, que para este problema é tida como uma restrição.

$$Maximizar\ \ R(x) = L\ = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \tag{4}$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\ \ \leq\ V(x) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i\ \leq B \tag{6}$$

$$P_i x_i \leq ft(\%).B \qquad \text{para } i = 1,2, \dots n\ (7)$$

$$x_i\ \ \geq 0 \qquad \text{para } i = 1,2, \dots n\ (8)$$

No modelo acima, temos a essência da maximização dos resultados financeiros *R*(*x*) sujeitos às restrições de orçamento *B* e de exposição ao risco *V*(*x*). Foi adicionada uma restrição opcional (Equação 7) referente ao investimento máximo em um ativo, ou seja, o patrimônio alocado em um único ativo $P_i x_i$ não pode ser maior do que uma fração do orçamento total. Trata-se de uma decisão de balancear o portfólio, pois a decisão também estará atrelada ao preço do ativo, possibilitando ao gestor se desfazer de ações caras e comprar ações mais baratas.

Outra forma de modelar o mesmo problema de determinação de um portfólio de ativos é minimizando a quantidade de risco assumida pelo investidor. Desta forma, uma das restrições envolve um hipotético lucro mínimo, que é o resultado da decisão do conjunto de ativos e seus retornos esperados. A outra restrição está associada ao preço pago por cada ação, a quantidade de volume em cada ativo e o orçamento disponível. Assim como no modelo anterior, pode-se adicionar uma restrição limitando uma porcentagem máxima do orçamento a ser investida em um único ativo. O modelo de otimização quadrática é apresentado a seguir.

$$Minimizar \qquad V(X) = \sum_{i}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \tag{9}$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\ \geq L \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i \leq B \qquad (11)$$

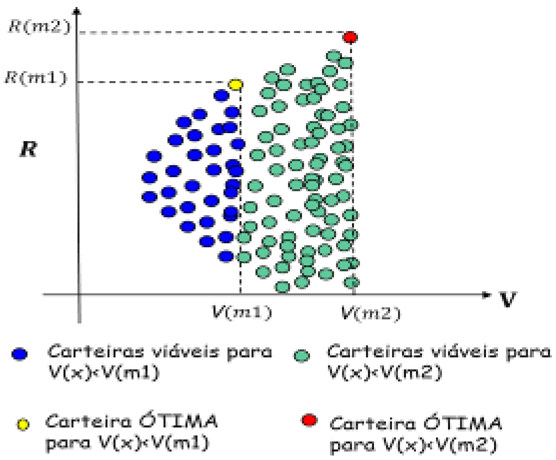
$$x_i \geq 0 \qquad \text{para } i = 1,2, \dots n \ (12)$$

Pela hipótese dos mercados eficientes, teremos um lucro igual a expectativa de ganho dos ativos: $L = R(x)$. Mercados de capitais eficientes são aqueles nos quais os preços de mercado corrente refletem toda informação conhecida disponível. Isso significa que os preços dos mercados refletem o valor presente dos ativos, e que não há como obter lucros extraordinários pelo uso de conjunto de informações disponíveis (FAMA, 1970).

Segundo Hillier e Lieberman (2006), um grande inconveniente para este modelo matemático é a dificuldade de escolher um valor apropriado para lucro mínimo *L*. Em geral, considerando que os riscos podem ser avaliados conforme os dados históricos de seus ativos, usamos a metodologia da *programação não-linear paramétrica* para gerar a solução ótima em função de *L* ao longo de um grande intervalo de valores.

Se colocarmos em um gráfico as diversas soluções viáveis de um problema *m*i, i.e., aquelas que atendem à todas as suas restrições, teremos uma situação semelhante à da Figura 7. Podemos ver claramente que diversas soluções são dominadas por outras, possuindo um retorno maior para um mesmo valor de risco ou um risco menor para um mesmo valor de retorno. Um ativo ou portfólio dominado é relativamente ineficiente em relação à compensação do risco (OGDEN, 2003). Dessa forma, as soluções ótimas que nos interessam estão na fronteira dessa região formada pelas soluções viáveis, tais como as carteiras *m*1 e *m*2 destacadas na figura.

Figura 7 – Representação das soluções viáveis de um problema de escolha de portfólio

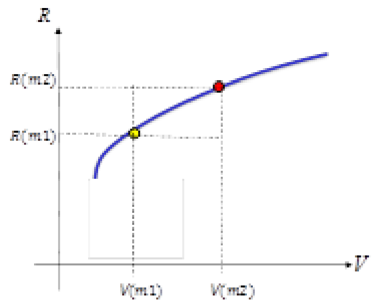


Fonte: Adaptado de Markovitz (1959)

A programação não-linear paramétrica consiste em examinar combinações de valores de *R*(*x*) e *V*(*x*), escolhendo soluções ótimas para o modelo que ofereçam a melhor relação entre esses dois valores. Esse procedimento irá gerar a fronteira eficiente do gráfico bidimensional dos pontos (*R*(*x*); *V*(*x*)) para a variável *x*. Uma solução ótima *x** sempre reside na fronteira eficiente, *pois dado que ela é ótima, não existirá nenhuma solução viável *x*' com o mesmo valor de risco *V*(*x**) e com um valor de retorno esperado *R*(*x*') maior, e nem um solução com o mesmo valor de *R*(*x**) com um valor de *V*(*x*') menor.

Supondo que o orçamento, os preços das ações (em um determinado momento de análise), os ganhos esperados por ativo e os riscos sejam fixos, podemos resolver o modelo para um risco aceitável inicial $V(m1)$, e com isso encontramos um retorno ótimo $R(m1)$. Aumentando o limite de aceitação do risco para $V(m2)$ e resolvendo o modelo novamente, temos um novo retorno ótimo $R(m2)$, conforme mostrados na Figura 7. Fazendo o procedimento para diversos valores de variância, encontraremos a fronteira eficiente para tomada de decisão de uma carteira formada por essas soluções ótimas, conforme mostrado na Figura . Qualquer portfólio $(x_1, x_2, ..., x_n)$ residente na fronteira será considerado um portfólio otimizado em termos de sua utilidade.

Figura 8 – Fronteira Eficiente como resultado da otimização



Fonte: Adaptado de Markovitz (1959)

O objetivo do modelo matemático é não apenas encontrar os valores números de *R*(*x*) e *V*(*x*), mas também encontrar o montante aplicado em cada ação. Matematicamente, temos uma solução $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, que maximiza *L* = *R*(*x*) para um limite de risco máximo aceitável. Se a solução ótima para $V(m1)$ for $(x_1^* = \alpha, x_2^* = \beta, ..., x_n^* = \gamma)$, temos a recomendação de α

ações do ativo x_1, β ações do ativo x_2 e assim consecutivamente. Estas análises periódicas possibilitam ao gestor de investimento analisar oportunidades de compra e venda.

De acordo com Dong (2003), um sistema para seleção de um portfólio ótimo deve ser capaz de determinar a melhor combinação de ativos baseada no perfil do investidor. Ele deve alocar as proporções de investimentos de todos os ativos e fazer uma realocação das ações para atingir o melhor portfólio. O sistema fornece a estrutura para apoiar a decisão do investidor em todos os estágios, mas os tomadores de decisão devem aplicar seu conhecimento e experiência para ajustar o resultado quando necessário.

4. Conclusões

Embora as Finanças Quantitativas tenham sofrido várias inovações, tais como os modelos de precificação de derivativos Black e Scholes (1972), os modelos de análise da exposição ao risco de *Value at Risk* (JORION, 1991) e os complexos produtos da Engenharia Financeira, a teoria da carteira de Markowitz é ainda bastante aplicada mercado financeiro e estudada na academia.

Existem muitos desafios ao usar os modelos matemáticos de programação não-linear para seleção de ações para uma carteira de investimento, como o correto entendimento das variáveis de decisão (volume das ações) e a correta estimação dos parâmetros, como retorno esperado, risco e covariância (JORION, 1991). É possível selecionar ativos através de modelos matemáticos, tendo o tomador de decisão (acadêmico, gestor de investimento ou analista) informações suficientes para não apenas iniciar um novo portfólio, mas também ajustá-lo frequentemente.

Por outro lado, o eminente cientista e ganhador, do Prêmio Nobel em economia Herbert Simon indica que na prática o *satisficing* prevalece sobre a otimização. Ou seja, a tendência é que gestores de investimentos procurem uma solução que seja na prática suficientemente boa para um problema em questão ao invés de um portfólio que pertença à fronteira eficiente.

Isto ocorre principalmente devido à dois motivos: o primeiro é que em supostos Mercados Eficientes, as informações impactam imediatamente nas perspectivas e consequentemente nos próprios preços dos ativos. Dessa forma, é muito difícil estimar os valores dos parâmetros com um grau de precisão requerido pelo modelo, em especial dos retornos esperados.

Um grande problema do modelo é a estimação dos valores esperados dos ativos. A definição do valor esperado pode ser realizada por fluxos de caixa descontados pelo risco, por análise dos dividendos futuros, pela análise histórica da cotação (a denominada Análise Técnica pelo mercado), pelo risco sistêmico do ativo (CAPM), por simulações estocásticas, dentre outros.

Além disso, um mercado de capitais como o brasileiro possui mais de 150 ações com um bom nível de negociação na Bolsa de Valores de São Paulo. Tal quantidade pode complicar a vida do gestor de investimentos que busque uma seleção de ações por modelos matemáticos considerando todas estas ações. Para N ações a serem consideradas no modelo, tem-se $N(N - 1)/2$ covariâncias a serem analisas, além dos parâmetros individuais de cada ativo (retorno esperado e risco). Assim, surge a necessidade de sistemas de informação capazes de processar este o grande fluxo de informações.

Para tomadores de decisão em ambiente de risco e incerteza, não basta usar apenas os modelos matemáticos, muitas vezes já desenvolvidos e testados. Recomenda-se a boa compreensão dos mercados e dos instrumentos financeiros, não apenas em seus aspectos econômicos, mas também em seus aspectos jurídicos e institucionais. Por fim, uma carteira de investimentos pode conter mais tipos de ativos, como futuros, títulos públicos, opções de ações, dentre outros.

5. Referências

ARENALES, Marcos, ARMENTANO, Vinícius Amaral, MORABIO, Reinaldo e YANASSE, Horácio Hideki. **Pesquisa Operacional para cursos de engenharia.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

ASSAF NETO A., LIMA F. G. **Curso de Administração Financeira.** São Paulo: Editora Atlas S.A, 2009.

BLACK F., SCHOLES M. **The valuation of options contracts and a test of market efficiency**. Journal of Political Economy, Chicago, v. 27 497-505

DAMODAN, A. **Applied Corporate Finance: A User´s Manual.** New York: John Wiley & Sons, 1996.

DONG, J., DU, H. S., WANG, S., CHEN, K., DENG, X., **A framework of Web-based Decision Support Systems for portfolio selection with OLAP and PVM. Decision Support Systems.** v. 1067, p. 1-10, 2003.

ELTON, E.J. e GRUBER, M.J. - Modern Portolio Theory and Investment Analysis, John Wiley, 5a ed, 1995.

FAMA, E**. Efficient Capital Markets: review of theory and empirical work,** Journal of Finance, 25, p. 383-417, 1969. Publicado em maio de 1970.

HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional.** São Paulo: McGraw-Hill, 2006

HULL, J. **Introdução aos Mercados Futuros e de Opções.** São Paulo: Cultura Editores Associados, 1996.

JORION, P., Bayesian and CAPM Estimators of the Means: Implications for Portfolio Selection. **Journal of Banking and Finance.** v. 15, p. 717-727, Jun., 1991.

JORION, P. **Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk**. New York: McGraw-Hill, 2000.

LEMGRUBER, E.F., SILVA, A.L.C., LEAL, R.P.C. e COSTA JR., N.C.A. **Gestão de Risco e de Derivativos.** São Paulo: Atlas, 2001.

MAKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, 1952

MARKOWIT, H. **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.** New York: Wiley, 1959.

MONTGOMERY D. e C. RUNGER G. C. Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2012

MURTY, K. G. **Linear and Combinatorial Programming.** Florida: Editora Robert E.Krieger Publishing Company, 1985.

OGDEN, Oseph P., JEN, Frank C. e O'CONNOR Philip F. **Advanced Corporate Finance – Policies and Strategies.** New Jersey: Prentice Hall, 2003.

SILVA, E. D. e MENEZES, E. M.. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação.** Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001.

WILMOT, P., HOWISON, S. e DEWYNNE, J. **The Mathematics of Financial Derivatives**. Cambrige: Cambridge University Press, 1995.